Mathenpoche3 : Racines carrées

Chapitre « court » en terme de leçon mais on retrouve des applications dans de très nombreux types d'exercices : simplifications, réductions, développements, équations, géométrie…

Série0 : Prendre un bon départ

Exo1 : Carrés et calcul mental

Compléter avec n entre 1 et 12 des égalités du genre n^2 = … ou $\ldots^2$ = résultat de (n^2)

Exo2 : Carrés et relatifs

Comme le précédent mais en jouant sur $(-n)^2$ et $-n^2$.

Exo3 : Décomposer en produit à facteur carré

On demande de compléter des égalités du genre $32 = 2*\ldots^2$ puis sur la fin $75=\ldots*\ldots^2$.

Exo4 : Calculatrice et racines carrées

On demande de donner à l'aide de « TA » calculatrice des valeurs approchées de calculs faisant intervenir des radicaux.

$5 + 7\sqrt{3} \approx \ldots$; $5\sqrt{3} + 7 \approx \ldots$; $\sqrt{\pi - 3} \approx \ldots$; $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \ldots$; $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx \ldots$; nombre d'or, r(2) + r(3)…

Série1 : Définition, propriétés

Exo1 : Découverte, définition, notation

Q1 à 4 Choisis la bonne proposition (à compléter éventuellement) :

Q1 Il n'existe pas de nombre dont le carré vaut 36.
Il existe un seul nombre dont le carré vaut 36, c'est … .
Il existe deux nombres dont le carré vaut 36 : … et … .

Q2 idem avec 0,25, q3 idem avec 0, q4 idem avec –9.

Q5 à 8 on affiche la définition

Définition :	la racine carrée d'un nombre positif *x* est le nombre positif qui, élevé au carré, donne *x*. Il se note à l'aide du symbole « radical » $\sqrt{x}$.

Q5 (on réaffiche le résultat de la q1) Choisis la bonne proposition :
r(36) = -6 car $(-6)^2 = 36$.
r(36) = 6 car $6^2 = 36$ et 6 >0.
r(36) n'existe pas.

Q6 idem avec r(0,25), q7 idem avec r(0) (il n'y a alors que 2 propositions), q8 idem avec r(-9).

Q9 On ne note pas le symbole de la multiplication (le signe « * ») devant une lettre ou une parenthèse. On adopte la même convention devant le symbole radical. Ainsi 5*r(49) se note plus simplement 5r(49).
Complète :
r(49) est le nombre positif qui, élevé au carré, vaut …, c'est …. Donc 5r(49) = …*… = ….

Q10 r(100) est le nombre positif qui, élevé au carré, vaut …, c'est …. Donc 3+2r(100) = ….
(si l'élève répond 50 lui mettre une alerte spécifique)

Exo2 : Carré d'un radical

Q1 $(\text{r}(16))^2 = (…)^2 =$ ….

Q2 On peut aussi faire le raisonnement suivant, qui ne nécessite pas d'effectuer le calcule de r(16) :
r(16) est par définition, le nombre positif qui, élevé au carré vaut … donc $(\text{r}(16))^2 =$ ….

Q3 on peut vérifier à l'aide d'une calculatrice que le nombre r(5) ne semble pas décimal. On peut néanmoins calculer la valeur de $(\text{r}(5))^2$ sans connaître la valeur de r(5) mais en utilisant juste sa définition :
r(5) est par définition, le nombre positif qui, élevé au carré vaut … donc $(\text{r}(5))^2=$ ….

Q4 r(pi) est par définition, le nombre positif qui, élevé au carré vaut … donc $(\text{r(pi)})^2 =$ ….

A la validation de q3et4, afficher : on simplifie parfois l'écriture de $(\text{r}(7))^2$ en $\text{r}(7)^2$.

Q5 Si *a* est un nombre positif, $(\sqrt{a}\,)^2 = \sqrt{a}^2 =$ ..... car $\sqrt{a}$ est par définition le nombre positif qui élevé au carré donne ..... .

Q6 on laisse affiché q5 et on demande de compléter : Autrement dit, si a est un nombre positif : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} =$ …

Q7 on laisse affiché le bilan q5et6 et on demande de choisir la bonne proposition (à compléter éventuellement).

En appliquant la propriété, $\sqrt{7}^2 =$ … .

On ne peut pas appliquer la propriété pour calculer $\sqrt{7}^2$.

Le nombre $\sqrt{7}^2$ n'existe pas.

Q8 idem avec $\sqrt{2{,}1} \times \sqrt{2{,}1}$, **q9** avec $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2$ et **q10** avec $\sqrt{-3}^2$.

Exo3 : Radical d'un carré

Sur le même modèle que l'exo précédent mais avec le carré sous la racine…

Q1 $\text{r}(3^2)= \text{r}(…) =$ ….

Q2 On peut aussi faire le raisonnement suivant, qui ne nécessite pas d'effectuer le calcule de 3^2 :
$\text{r}(3^2)$ est par définition, le nombre positif qui, élevé au carré vaut $…^2$. Ce nombre est … donc $\text{r}(3^2)=$ ….

Q3 On peut néanmoins calculer la valeur de $\text{r}(5{,}3187954^2)$ sans connaître la valeur de $5{,}3187954^2$ mais en utilisant juste sa définition de la racine carrée d'un nombre :
$\text{r}(5{,}3187954^2)$ est par définition, le nombre positif qui, élevé au carré vaut $…^2$. Ce nombre est … donc $\text{r}(5{,}3187954^2) =$ ….

Q4 $\text{r}(\text{pi}^2)$ est par définition, le nombre positif qui, élevé au carré vaut pi^2 donc $\text{r}(\text{pi}^2) =$ ….

Q5 *a* est un nombre quelconque, $\sqrt{a^2}$ est par définition le nombre positif qui élevé au carré donne $.....^2$.
Si on sait de plus que *a* est positif, alors le nombre positif qui élevé au carré donne a^2 est … et donc $\sqrt{a^2} =$… .

Q6 on laisse affiché q5 et on demande de compléter : Autrement dit, si a est un nombre positif : $\sqrt{a \times a}$ = …
Q7 on laisse affiché le bilan q5et6 et on demande de choisir la bonne proposition (à compléter éventuellement).

En appliquant la propriété, $\sqrt{7{,}3^2}$ = … .

On ne peut pas appliquer la propriété pour calculer $\sqrt{7{,}3^2}$.

Le nombre $\sqrt{7{,}3^2}$ n'existe pas.

Q8 idem avec $\sqrt{\frac{2}{7} \times \frac{2}{7}}$, **q9** avec $\sqrt{-5^2}$ et **q10** avec $\sqrt{(-5)^2}$.

Exo4 : Radicaux et opérations (conjectures)

Q1 à 8 en qi on fait faire les deux calculs r(a op b) et r(a) op r(b) (« op » désigne les 4 opérations) et en qi+1 la comparaison.

Q1 $\sqrt{64} + \sqrt{36} =$ $\quad$ $\sqrt{64 + 36} =$ $\qquad$ Q3 $\sqrt{9} - \sqrt{25} =$ $\quad$ $\sqrt{9 - 25} =$

Q5 $\sqrt{49} \times \sqrt{16} =$ $\quad$ $\sqrt{49 \times 16} =$ $\qquad$ Q7 $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} =$ $\quad$ $\sqrt{\frac{25}{9}} =$

Q9 on écrit les 4 conjectures avec des lettres et on demande de sélectionner celles qui sont à écarter.
Q10 idem avec des phrases (genre « la racine d'une somme c'est la somme des racines »).

Exo5 : Radical et produit

Q1à5 on fait compléter un tableau du genre suivant (1 ligne par question).

a	b	a*b	r(a)	r(b)	r(a)*r(b)	r(a*b)

…
q1 on donne a et a*b, q2 on donne b et r(a), q3 a et r(a)*r(b), q4 b et r(a*b), q5 r(b) et r(a*b).

En q6, on laisse dans un premier temps le tableau affiché et un topo.
Observe les deux dernières colonnes du tableau, on va maintenant démontrer ce qui semble apparaître…
Tu vas prouver que, si a et b sont des nombres positifs, alors r(a*b) = r(a)*r(b).
Clique sur suite.
Lorsque l'élève fait « suite » il obtient :
a et b désignent des nombres positifs, complète : (r(a*b))^2 = … .
q7 on a de plus (r(a)*r(b))^2 = (r(…))^2 * (r(…))^2 = … * … .
q8 que peut-on en conclure pour l'instant ? r(a*b) = r(a)*r(b) ou (r(a*b))^2 = (r(a)*r(b))^2 ?
q9 complète (-5)^2 = … et 5^2 = … . Deux nombres qui ont le même carré sont ils forcément égaux ? oui ou non ?
q10 On a comparé les carrés des deux nombres r(a*b) et r(a)*r(b). Leurs carrés sont égaux donc ces deux nombres sont égaux ou … . La racine carrée d'un nombre est par définition positive donc on sait de plus que les deux nombres r(a*b) et r(a)*r(b). sont … . On en conclut que ces deux nombres sont égaux.

Exo6 : Radical et quotient

Même genre que le précédent avec des quotients…

Série2 : Calculs

Exo1 : Calcul mental

Prendre des radicaux de carrés parfaits simples et donner des calculs du genre 3r(36) ou 5+3r(4) ou 10 – 5(16)…

Exo2 : Calculs liés à la définition

10q on demande que le résultat (l'élève sélectionne au préalable si le calcul a un sens ou non…).

$\sqrt{23}^2$ $\quad -\sqrt{11}^2$ $\quad \left(-\sqrt{2}\right)^2$ $\quad \sqrt{13^2}$ $\quad \sqrt{-13^2}$ $\quad \sqrt{(-1)^2}$ $\quad -\sqrt{25^2}$

Exo3 : Carrés de produits

Faire les premières questions à trous et les dernières on demande que le résultat.

$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = \ldots\ldots^2 \times (\ldots\ldots)^2 = \ldots \times \ldots = \ldots$ $\qquad \left(7\sqrt{3}\right)^2 = \ldots\ldots^2 \times (\ldots\ldots)^2 = \ldots \times \ldots = \ldots$

$\left(4\sqrt{5}\right)^2 =$ $\qquad \left(2\sqrt{7}\right)^2 =$ $\qquad \left(-2\sqrt{2}\right)^2 =$ $\qquad \left(-3\sqrt{11}\right)^2 =$

Exo4 : Carrés de quotients

Comme le précédent mais avec des quotients…

$\left(\dfrac{\sqrt{7}}{5}\right)^2 =$ $\qquad \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 =$ $\qquad \left(\dfrac{-5\sqrt{2}}{3}\right)^2 =$ $\qquad \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2 =$

Exo5 : Radicaux complexes

e) $\sqrt{\sqrt{81}}$ $\qquad \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$ $\qquad \left(\sqrt{2+7\sqrt{3}}\right)^2$ $\qquad \left(\sqrt{\pi-1}\right)^2$

$\left(\sqrt{\sqrt{3}-5}\right)^2$ $\qquad \sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}$

l'élève sélectionne au préalable si le calcul a un sens ou non…, ne pas mettre par contre de calculs du genre : r((r(3)-5)^2) où il y a des questions de signe, c'est pour la série pour aller plus loin…

Exo6 : radicaux et produits

Commencer par des questions du genre calcule mentalement $\sqrt{36 \times 84}$ ou $\sqrt{4 \times 49 \times 25}$, à la validation on montre le fractionnement du radical. Ensuite donner des utilisations inverses de la formule, plus délicates pour les élèves :

$\sqrt{3} \times \sqrt{12} =$	$\sqrt{18} \times \sqrt{8} =$
$\sqrt{80} \times \sqrt{5} =$	$\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{5} =$

Sur la fin, rajouter des coefficients 2r(2)*3r(50)…

Exo7 : Radicaux et quotients

Comme l'exo précédent mais avec des quotients…

Exo8 : Synthèse (produits et quotients)

On demande le résultat de la simplification d'écritures complexes du genre :

$$\sqrt{\frac{7}{50}} \times \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{35}} =$$

Série 3 : Simplification

Exo1 : Extraction d'un carré d'un radical

5q sur le modèle r(x*b) = r(…^{2}*b) = r(…) * r(…) = …r(…)
5q où on met un facteur devant : nr(x*b) = nr(…^{2}*b) = nr(…) * r(…) = n*…r(…) = …r(…)

Exo2 : Simplifications (assistées)

Qi Fais apparaître un produit de 2 facteurs, l'un étant un carré, le plus grand possible.
r(50) = r(…*…).
Qi+1 r(50) = r(25*2) = r(…^{2}*b) = r(…) * r(…) = …r(…).
Q7-8 et q9-10, mettre un coefficient devant…

Exo3 : Simplifications (à trous)

Complète r(50) = r(…*…) = …r(…) (le produit du calcul intermédiaire doit permettre ensuite la simplification).
Mettre ensuite des exemples du genre r(32). Si l'élève met r(32)=r(4*8)=2r(8), ne pas lui compter faux, lui dire que son résultat peut encore être simplifié « je te donne une deuxième chance pour obtenir le résultat simplifié : »
r(32)=r(4*8)=2r(8) = 2 r(…*…) = 2*…r(…) = …(r(…).
Sur les dernières questions mettre un coefficient dès le départ devant le radical…

Exo4 : Simplifications

Demander juste le résultat, peut être par l'intermédiaire d'un bouton « saisir un radical » (qu'il faudra de toutes façons pour saisir les résultats de certains de exercices des séries suivantes…).
Si un élève donne une réponse qui n'est pas simplifiée au maximum, lui compter comme une première erreur en le lui signalant…
Voici des exemples de simplifications qu'on peut demander, des classiques…

$\sqrt{12}=$	$\sqrt{24}=$
$\sqrt{50}=$	$\sqrt{48}=$
$\sqrt{72}=$	$\sqrt{150}=$
$\sqrt{80}=$	$\sqrt{108}=$
$7\sqrt{20}=$	$3\sqrt{175}=$
$5\sqrt{96}=$	$4\sqrt{32}=$

Exo5 : Produits et simplifications

L'exercice a pour but de préparer les développements faisant intervenir les radicaux.
L'élève doit savoir effectuer a r(b) * c r(d) et le simplifier le cas échéant.
Q1 a r(b) * r(b)
Q2 r(a) * b r(a)
Q3 a r(b) * c r(b)
Q4 idem q3 mais avec signes…
Q6 à 10, en incluant les questions de signe progressivement des calculs du genre r(21) * r(14) puis sur la fin 3r(2) * 2r(12)**…**

Exo6 : Suppression du radical au dénominateur

Lorsqu'une écriture fractionnaire comporte un radical au dénominateur, on convient d'en simplifier l'écriture : on cherche à en obtenir une où le dénominateur est un nombre entier.
On utilise pour cela la propriété : le quotient de deux nombres reste inchangé si on multiplie ces deux nombres par un même nombre (non nul). Complète :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{...}}{\sqrt{2}\times\sqrt{...}}=\frac{\sqrt{...}}{...}.$$

Se limiter aux cas de dénominateurs non composés…

Série4 : Réductions de sommes

Exo1 : Le principe

Proposer une difficulté croissante…

Réduis afin de simplifier :

$A = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$ $A = (......+ ......- ......) \times \sqrt{7}$ $A =$	$B = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 7\sqrt{3}$ $B =$ $B =$
$C = -\sqrt{11} + 2\sqrt{13} + 7\sqrt{11} - 7\sqrt{13}$ $C =$	$D = 5 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 8 + 5\sqrt{3}$ $D =$

Pour les derniers exemples réfléchir au mode de saisie de la réponse…

Exo2 : Simplifier puis réduire (a trou)

Le calcul se fait à trous, guidant ainsi l'élève…

$G = -7\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - \sqrt{12}$

$G = -7\sqrt{\ldots\times 3} + 9\sqrt{3} - \sqrt{\ldots\times 3}$

$G = -7\sqrt{\ldots} \times \sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \sqrt{\ldots} \times \sqrt{3}$

$G = -7\times\ldots\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \ldots\sqrt{3}$

$G = -\ldots\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \ldots\sqrt{3}$

$G = (-\ldots + 9 - \ldots)\sqrt{3}$

$G = \ldots\sqrt{3}$

Exo3 : Sommes algébriques (niveau 1)

Ecrire sous la forme a r(b), a étant un entier relatif, b est donné (l'élève sait quel nombre il doit faire apparaître en commun sous chaque radical).

Pour le premières questions le radical apparaît déjà une fois sur l'un des radicaux de la somme, pour les dernières nom… Faire des sommes de 3 ou 4 termes, pas plus…

Exemples : au début plutôt « écrire sur la forme a r(3) : $-7\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - \sqrt{12}$ » puis ensuite, sur la fin de l'exo « écrire sous la forme a r(13) : $\sqrt{1872} - 10\sqrt{325} + 3\sqrt{52}$ ».

Exo4 : Sommes algébriques (niveau2)

Idem exo précédent mais on ne donne plus la valeur de b dans l'énoncé…

Pareil commencer par des questions où la racine visée est apparente puis finir par d'autres où elle l'est pas…

$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{125} - 2\sqrt{5} - 5\sqrt{245}$

$E = 2\sqrt{50} + 3\sqrt{162} - 5\sqrt{8}$

$K = \sqrt{150} + 2\sqrt{24} - 2\sqrt{54}$

…

Série4 : Développements

Exo1 : Distributivité

Le développement est assisté : le calcul se fait à trous, en plus, il ne présente pas de radical à simplifier…

$A=\sqrt{5}\left(3-\sqrt{3}\right)$	$B=2\sqrt{3}\left(5-4\sqrt{2}\right)$
$C=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$	$D=\left(2\sqrt{7}-5\right)\left(3-4\sqrt{3}\right)$
$F=\left(5-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(2+3\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)$	

Exo2 : Distributivité (bis)

Le même que le précédent mais ou on rencontre des simplifications, le mieux est peut être de proposer 3 solutions sous forme de qcm pour la réponse et de demander à l'élève de faire ses calculs sur papier, en pensant à simplifier ?

$A=\sqrt{5}\left(3-2\sqrt{5}\right)$	$A'=5\sqrt{3}\left(4-2\sqrt{3}\right)$
$B=\left(\sqrt{3}-5\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$	$B'=\left(\sqrt{3}-5\right)\left(3-4\sqrt{3}\right)$
$B''=\left(2\sqrt{3}-5\right)\left(3-4\sqrt{3}\right)$	$C=\left(5-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(2+3\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)$
$D=\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$	$D'=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{14}+2\right)$
$\boldsymbol{E}=2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)$	$F=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{10}\right)\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)$

Exo3 : Développements astucieux

Des calculs du genre :

$$I=\sqrt{3}\left(\frac{5}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)\ ;\ I=-10\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\ ;\ K=3\sqrt{7}\left(1-2\sqrt{7}-\frac{1}{3\sqrt{7}}\right)$$

$$E=\left(\sqrt{24}-10\sqrt{6}\right)\left(\frac{5}{2\sqrt{6}}-1\right)\ ;\boldsymbol{F}=3\sqrt{21}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{21}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

Exo4 : Identités remarquables (niveau 1)

10q Le calcul se fait à trous, il s'agit des cas simples de radicaux sans coefficients devant, le double produit ne génère pas de radical à simplifier …

$$I=\left(3+\sqrt{2}\right)^2\ ;\ D=\left(\sqrt{7}-2\right)^2\ ;\ F=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\ ;$$

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\ ;\ \left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2\ ;\ \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\ ;$$

Exo5 : Identités remarquables (niveau 2)

Le même que le précédent, mais en rajoutant des coefficients devant les radicaux…

$$G=\left(3+2\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)\ ;\ K=\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2\ ;\ H=\left(2\sqrt{13}+7\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{13}-7\sqrt{5}\right)\ldots$$

Exo6 : Identités remarquables (niveau 3)

5q le radical généré par le double produit présente une simplification, l'exercice est présenté sous la forme :

on pose . $M=\sqrt{2}+\sqrt{10}$ et $N=\sqrt{2}-\sqrt{10}$.

Calculer : $M+N$; $M-N$; $M\times N$ M^2 ; N^2. Refaire ensuite 5q avec $11\sqrt{2}\pm 7\sqrt{6}$.

Série5 : Géométrie

Exo1 : Diagonale d'un carré, d'un cube

Q1et2 Pythagore dans un carré de côté a puis obtention de d = a r(2).
Q3 application directe : diagonale d'un carré de coté 7, côté d'un carré de diagonale 5 r(2).
Q4 côté d'un carré de diagonale 6 cm (valeur exacte, puis approchée).
Q5à7 dans un cube de côté a, d = a r(3)
Q8et9 applications comme q3et4.
Q10 la diagonale d'une face d'un cube vaut 10 cm, combien vaut la diagonale du cube ?

Exo2 : hauteur d'un triangle équilatéral.

Q1,2 obtention de h = a r(3) / 2.
Q3 application directe de la formule.
Q4 si h = 7 r(3) retrouver le côté.
Q5 si h = 6 cm retrouver le côté (valeur exacte, puis approchée).

Exo3 : Calculs autour de carrés

Q1à3 aire, périmètre et diagonale d'un carré de côté r(n), n entier non multiple de 2
Q4à6 aire, périmètre et diagonale d'un carré de côté 2 r(2) ou 8 r(2).
Q7à9 idem avec un côté égal à k r(2) entier autre que 1,2ou8.
Q10 diagonale d'un carré de coté k r(n), n entier multiple de 2 (pour qu'il y ait simplification).

Exo4 : Calculs autour de rectangles

Q1à3 aire, périmètre et diagonale dans un cas du genre 5r(12) et 2r(27)
Q4et5 périmètre et aire dans un cas du genre 8 – 5r(2) et 3r2) pour les dimensions du rectangle

Exo5 : Triangle, cercle

Le triangle MNP est tel que : MP = $2\sqrt{11}$ cm , MN = $\sqrt{154}$ cm et NP = $3\sqrt{22}$ cm.
Q1 Démontrer que ce triangle est rectangle
Q2 calculer son aire en cm^2
Q3 rayon du cercle circonscrit
Q4 un des angles aigus
Q5 la hauteur issue du sommet de l'angle droit (indication, utiliser l'aire…).

Exo6 : Identités remarquables en géométrie

Q1et2 aire et diagonale d'un carré de côté du genre r(m) + n
Q3,4 et 5 aire, diagonale puis périmètre d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont conjugués du genre m – r(n) et m + r(n)
Q5et6 aire et diagonale d'un rectangle de largeur r(m) – n et r(m) + n (se limiter à des entiers simples avec une diagonale qui présente une simplification, genre r(3) – 1 et r(3) + 1 où la diagonale est r(8) = 2r(2).
Q8,9et10 périmètre aire et diagonale d'un rectangle 16 – 4r(2) et 16 + 4r(2) (pour les 3 dernières questions, les valeurs ne sont pas aléatoires, c'est calculé pour que tout tombe juste…).

Série6 : Substituer, équation

Exo1 : Substituer par un radical

On donne une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ et on demande d'en calculer la valeur pour une valeur de la variable de type suivant : r(a), –r(a), ar(b) et –ar(b).

Exo2 : Substituer et identités remarquables

Comme pour l'exercice précédent mais on demande le calcul pour une valeur genre a + cr(b) (au début c = 1 puis apparition progressive du coefficient devant le radical et des nombres relatifs…).

Exo3 : Découverte $x^2 = a$

Q1 Choisis la bonne proposition (à compléter éventuellement) :

Il n'existe pas de nombre dont le carré vaut 36.
Il existe un seul nombre dont le carré vaut 36, c'est … .
Il existe deux nombres dont le carré vaut 36 : … et … .

Q2 Autrement dit l'équation $x^2 = 36$:

possède deux solutions : … et ….
Possède une solution : … .
Ne possède pas de solution.

Q3et4 idem 0, q5et6 idem avec –9, q7et8 avec 5.

Q9 a désigne un nombre quelconque, complète le début de chaque propriété par la bonne étiquette (a>0, a=0, a<0) :

Si … alors il n'existe pas de nombre dont le carré vaut a.
Si … alors il existe un nombre dont le carré vaut a, c'est … .
Si … alors il existe deux nombres dont le carré vaut a : -r(…) et r(…).

Q10 idem mais avec la formulation « équation ».

Exo4 : Application

Proposer des cas avec solutions exactes, solution sous forme de deux radicaux (avec éventuellement simplification) et inclure un cas sans solution.

Exo5 : Avec résolution préalable

Mettre des équations du genre $x^2 + b = c$ puis $ax^2 = c$ et $ax^2 + b = c$ et enfin $ax^2 + b = cx^2 + d$

Illustrer éventuellement la question par un problème géométrique (exemple : on enlève 4 coins de côtés x à un carré, quelle doit être la valeur de x pour que l'aire restante soit égale à tant), l'équation a alors deux solutions mais le problème qu'une…

Exo6 : Equations se ramenant à $x^2 = a$

Mettre 3 cas de type $(ax+b)^2 = c$ et 2 cas d'équations de degré 2 où on ne peut pas factoriser et où le développement entraîne une simplification des termes en x.

Série 7 : Pour aller plus loin

Exo1 : Dénominateurs complexes

Q1 On considère le nombre 1 / (r(5) – 2). Qcm « quel nombre obtient-on en multipliant sont numérateur et son dénominateur par r(5) ? »
Q2 idem avec multiplication par (r(5) – 2)
Q3 idem par l'expression conjuguée (r(5) + 2)
Q4 sélectionne l'expression par laquelle il faut multiplier le numérateur et le dénominateur du nombre 7/ (2+3(5)) pour obtenir une de ses écritures avec un dénominateur entier.
r(5) ou 3r(5) ou 2 + 3r(5) ou 2 – 3r(5)
q5 on fait faire la simplification à trous.
Q6,7 un autre exemple
Q8,9 un troisième exemple
Q10 après avoir réduit au même dénominateur, simplifie l'écriture de A :
A = 1 / (7 – 3r(2)) – 1 / (7 + 3r(2))

Exo2 : Racines de racines

On considère deux nombres de la forme a = r(x + r(x^2 – y^2)) et b = r(x – r(x^2 – y^2)) en s'arrangeant pour que x^2 – y^2 ne soit pas un carré parfait….
Q1 donner les valeurs de a^2 et b^2
Q2 valeur de ab
Q3 en déduire la valeur de $(a + b)^2$ = (r(x + r(x^2 – y^2)) + r(x – r(x^2 – y^2)) $)^2$
On considère deux nombres de la forme a = r(r(5) – r(3)) et b = r(r(5) + r(3)).
Q4 donner les valeurs de a^2 et b^2
Q5 valeur de ab
Q6 en déduire la valeur de $(a - b)^2$ = (r(r(5) – r(3)) + r(r(5) + r(3)) $)^2$
Q7à9 même genre avec $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
Dans ce cas, $(a+b)^2$ est un carré parfait, donc en q10 on peut demander, sachant que a+b est un nombre positif, en déduire la valeur de a + b.

Exo3 : Questions de signe

Q1 la propriété « si a est positif, r(a^2) = a » ne peut pas s'appliquer directement pour simplifier l'écriture de r($(-7)^2$) car –7 est négatif.
Mais en utilisant que deux nombres opposés ont le même carré, on obtient que r($(-7)^2$) = r(7^2) = … .
A la validation « remarque, on retrouve ce résultat en calculant $(-7)^2$: r($(-7)^2$) = r(49) = 7. »
Q2 tu as constaté à la question précédente que r($(-7)^2$) n'étais pas égal à –7 mais à l'opposé de –7 c'est à dire 7.
Ce résultat est généralisable : si a est un nombre négatif, alors son opposé x = -a est positif et deux nombres opposés ayant le même carré, on obtient que r(a^2) = r(x^2) et comme x est positif, on a r(x^2) = … .
On a donc r(a^2) = … (accepter x ou –a).
A la validation « tu as prouvé que si a est négatif, r(a^2) n'est pas égal à au nombre a mais à l'opposé de a.

Pour le questions suivantes on laisse affiché : si a est positif, r(a^2) = a et si a est négatif r(a^2) = -a (l'opposé de a).
Q3 En faisant attention au signe, simplifie : r($(-5)^2$) et r($(-pi)^2$)
Q4 idem avec r($(1 – 2/3)^2$) (sous forme de qcm 1 – 2/3 ou 2/3 – 1) et r($(1 – 7/3)^2$) (on précise que 1-2/3 et2/3-1 sont opposés ainsi que 1 – 7/3 et 7/3 – 1).
Q5 on demande de compléter r($(pi – 3)^2$) = … et r($(pi – 4)^2$) = … après avoir préciser les signes de pi-3 et pi –4
Q6 idem q7 avec 1 – r(2) et 2 – r(2).
Q7 on donne une expression genre r(5) – 3 qu'on demande d'élever au carré.
Q8 en déduire une simplification de r(14 – 6r(5)).
Q9et10 idem q7et8 avec 1 – 2r2).

Exo4 : Nombre d'Or

Le nombre d'or est désigné par la lettre phi et vaut 1 + r(5) /2.
Q1 écriture et simplification de 1 + 1/phi
A la validation on affiche qu'on a vérifié que phi = 1 + 1/phi
Q2 calcul de phi^2 et de 1 + phi (à la validation, dire qu'on peut obtenir le résultat comme une conséquence de l'égalité phi = 1 + 1/phi).
Q3 ABI est un triangle rectangle en A tel que AI = = 1/2 AB. Le cercle de centre I et de rayon BI coupe [AI) en D. On pose AI = x
Obtention de BI = xr(5)

Q4 on montre que AD = s(1 + r(5)) et on montre que le rapport L/l = phi (à la validation, un tel rectangle est dit rectangle d'or).
Q5 on enlève le carré de côté AB au rectangle d'or, il reste un petit rectangle dont les dimensions sont l et L-l. On montre que c'est aussi un rectangle d'or.

Exo5 : Simplifier avec des lettres

Varier questions du genre simplifier r($18a^2$) r($12b^3$) r($16a^2b^3$) r($90ab^2$)
On peut imaginer des dernières questions du genre r(12ab)*5r($3ab^3$)
Et questions du genre réduire $\sqrt{32a} + 3\sqrt{50a} - 7\sqrt{200a}$