GeoGebra pour consolider

GeoGebra pour consolider les notions de:

- **fonction composée**
- **asymptote oblique**

Objectif:

S'assurer de la maîtrise de la part des élèves de deux notions sus-signalées en leur demandant de construire point par point la courbe représentative de la fonction h = gof et son asymptote oblique Δ après avoir prouvé son existence avec papier et crayon.
(Cela nécessite une bonne maîtrise au préalable du logiciel sinon, il faut penser à les munir d'un petit tutoriel)

Situation de départ:

- Pour ne pas perdre nos objectifs, nous allons nous limiter à deux fonctions f et g telles que:
  - $f\left(D_f\right) \subset D_g$ Df: le domaine de définition de f et Dg: le domaine de définition de g
  - Chacune des courbes représentatives de f et de g n'a qu'une seule asymptote et cette asymptote est oblique
- On présente aux élèves un fichier GeoGebra où sont tracées:
  - (C_f): la courbe représentative de la fonction f et son asymptote oblique D_1
  - (C_g): la courbe représentative de la fonction g et son asymptote oblique D_2
- Interdire aux élèves
  - de faire usage des commandes: g(f(x)) et asymptote[fonction]
  - d'afficher la fenêtre algèbre (ils n'ont pas à connaître ni l'expression de f(x), ni celle de g(x), ni l'équation de D_1 et ni celle de D_2).

N.B: Il n'est pas possible de créer une barre d'outils personnalisée en supprimant ces deux options car il s'agit de commandes et non pas d'outils

Analyse de la situation

Soient f et g deux fonctions dont chacune des courbes admet une asymptote oblique alors on peut déduire que :

- $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} g\left(x\right) = \infty$
- elles peuvent s'écrire sous la forme: $f(x) = a_1x + b_1 + \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = a_2x + b_2 + \varepsilon_2(x)$
  où ε_1 et ε_2 sont deux fonctions telles que: $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1\left(x\right) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_2\left(x\right) = 0$

- On pose: $a_1x + b_1 = k(x)$ et $a_2x + b_2 = m(x)$

Alors $g\text{o}f(x) = g(f(x)) = a_2(a_1x + b_1 + \varepsilon_1(x)) + b_2 + \varepsilon_2(f(x)) = m(k(x)) + a_2\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x))$

- Ne perdons pas de vue que : $\lim_{x\to\infty} [a_2\varepsilon_1\left(x\right) + \varepsilon_2\left(f\left(x\right)\right)] = 0$

- $\lim_{x\to\infty}[a_2\varepsilon_1(x)]=0$ car $\lim_{x\to\infty}\varepsilon_1(x)=0$ et a_2 est une constante
- $\lim_{x\to\infty}[\varepsilon_2(f(x))]=0$ d'après la limite de la fonction composée ($\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et $\lim_{x\to\infty}\varepsilon_2(x)=0$)

Par suite la courbe de gof admet la droite **Δ: $y = mok(x) = a_2a_1x + a_2\,b_1 + b_2$** pour asymptote oblique

Etapes de la construction de la courbe de gof

- Marquer M: point quelconque sur (Cf)
- Projeter M sur les axes du repère: d'où $M_0(x_0, 0)$ et $M_1(0, f(x_0))$ (repère orthonormé)
- Prendre le symétrique de $M_1(0, f(x_0))$ par rapport à la 1ère bissectrice d'où le point $M_2(f(x_0),0)$
- Marquer le point M_3 de (C_g) d'abscisse $f(x_0)$: c'est le point admettant M_2 pour projeté orthogonal sur (xx'). Ainsi $M_3(f(x_0),g[f(x_0)])$
- Tracer
  - la droite Δ_1 parallèle à (yy') passant par M
  - la droite Δ_2 parallèle à (xx') passant par M_3
- Δ_1 et Δ_2 se coupent au point $M_4(x_0,g[f(x_0)])$: c'est un point de (C_{gof}) et (C_{gof}) n'est que le lieu de M_4 lorsque M décrit (C_f)

Construction de l'asymptote Δ à la courbe de gof : (C_{gof})

Reprendre l'algorithme sus-décrit pour la construction de la courbe de gof

- Marquer N: point quelconque sur D_1
- Projeter N sur les axes du repère: d'où $N_0(x_0, 0)$ et $N_1(0, k(x_0))$ (repère orthonormé)
- Prendre le symétrique de $N_1(0, k(x_0))$ par rapport à la 1ère bissectrice d'où le point $N_2(k(x_0),0)$
- Marquer le point N_3 de D_2 d'abscisse $k(x_0)$: c'est le point admettant N_2 pour projeté orthogonal sur (xx'). Ainsi $N_3(k(x_0),m[k(x_0)])$
- Tracer
  - la droite Δ_1 parallèle à (yy') passant par N
  - la droite Δ_2 parallèle à (xx') passant par N_3
- Δ'_1 et Δ'_2 se coupent au point $N_4(x_0,m[k(x_0)])$: c'est un point de Δ et Δ n'est que le lieu de N_4 lorsque N décrit Δ_1

Exécution: Voir le fichier GeoGebra ci-joint Courbe et asymptote gof.ggb

Annexe I
Fiche élève

Objectifs

- Tracer à partir de (C_f) et (C_g) la courbe d'une fonction h appelée composée de f par g et notée gof. A chaque réel x appartenant à D_f, h = gof associe g(f(x)).
- Tracer à partir de D_1: asymptote oblique de (C_f) et D_2: asymptote oblique de (C_g) la droite Δ: asymptote oblique de (C_{gof})

Passage à l'action

Exécuter les tâches suivantes:

- Ouvrir le fichier ''fonc _comp_eleve.ggb'' qui se trouve sur le bureau de votre poste:

  fonc_comp_eleve.ggb
  - La ligne (C_f) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR et D_1 est son asymptote oblique
  - La ligne (C_g) est la courbe représentative d'une fonction g définie sur IR et D_{2-} est son asymptote oblique

Etape 1

- Avec l'outil ''Point sur Objet'', marquer un point M quelconque sur (C_f). Désignons par x_0 son abscisse
- Construire M_0: le projeté orthogonal de M sur (xx') et M_1: le projeté orthogonal de M sur (yy') (Le repère est orthonormé).
- Exprimer les coordonnées de M_0 et celles de M_1 en fonction de f et de x_0
- Soit M_2 le symétrique de M_1 par rapport à la 1ère bissectrice (Droite d'équation: y=x)
  - Exprimer les coordonnées de M_0 en fonction de x_0 et de f
  - Construire M_2
- Marquer le point M_3 de (C_g) admettant M_2 comme projeté orthogonal sur (xx') et exprimer ses coordonnées en fonction de $x_{0,}$ f et de g
- Tracer
  - la droite Δ_1 parallèle à (yy') passant par M
  - la droite Δ_2 parallèle à (xx') passant par M_3
- Afficher le point M_4: intersection de Δ_1 et Δ_2 et exprimer ses coordonnées en fonction de $x_{0,}$ f et de g
- Dans le menu contextuel de $M_{4,}$ activer l'option ''Tracée activée'' et déplacer (ou animer le point M)
- La trajectoire ainsi obtenue de M_4 peut – elle être considérée comme étant la courbe représentative d'une fonction

- Désactiver la trace de M_4 et cliquer sur ''Rafraîchir l'affichage'' du menu Affichage (ou Ctrl + F) pour effacer la trajectoire déjà obtenue de M_4
- Activer l'outil ''Lieu'' puis cliquer successivement sur les points M_4 et M (Lieu de M_4 quand M décrit (C_f))
- Proposer une équation pour ce lieu en fonction de x_0, f et de g. Déduire que c'est la (C_{gof})
- Utiliser GeoGebra pour confirmer ou infirmer votre conjecture.

Etape 2: Construction de Δ l'asymptote de la courbe de gof

- Construire la droite Δ: asymptote de la courbe de gof en vous inspirant du support théorique ci-dessus (**Analyse de la situation**) et de l'étape 1
- Avec l'outil ''Point sur Objet'', marquer un point V quelconque sur (Cgof). Désignons par x son abscisse
- Tracer la droite T parallèle à (yy') et passant par V
- Afficher le point V' où T coupe Δ
- Dans la zone de saisie, écrire: d = distance[V,V'] puis valider
- Activer l'outil ''Insérer Texte'' puis:
  - Cocher la case ''Formule Latex'' puis écrire: VV'=d=
  - Ouvrir l'icône ''Objets'' et dans la liste qui apparaît, sélectionner **d**
  - Valider et fermer la fenêtre
- Remarquer que le texte: '' VV'= d = …. '' Suivi de sa valeur s'affiche
- Déplacer V sur (C_{gof}) de manière de faire tendre x vers ∞ (+ ou -)
- Noter ce qui se passe à d
- Que venez vous de vérifier ?

Annexe II
Apports du logiciel

La composition des fonctions est une notion assez délicate et qui crée un certain malaise pour les élèves et même s'ils arrivent à bien mener le calcul de l'expression l'image par la composée, ils ont du mal à concevoir cette histoire de l'image de l'image.

Mes aspirations:

- Faire participer les élèves à la construction de leur savoir
- Qu'ils sentent la nécessité et comprennent la signification de chaque étape à travers la détermination des coordonnées du nouveau point introduit
- Pourquoi ne pas s'arrêter à M_3 (puisque on vient de faire l'image de l'image) et pousser jusqu'à M_4
- Evaluer le degré d'assimilation de la notion en mettant les élèves dans une situation qui nécessite plus d'imagination: construction de l'asymptote de la composée
- Illustrer graphiquement la notion d'asymptote oblique à partir de la prédiction graphique d'une limite: la courbe et son asymptote s'approchent de plus en plus sans se couper (la distance tend vers 0 et non pas égale à 0