Un peu de douceur dans un monde de brute

Énoncé[1]

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0;1]$.
On considère la variable aléatoire définie par $T=\frac{-1}{\lambda}\ln(X)$, où λ est un réel strictement positif.

1. Démontrer que la loi de T est la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Expérimentation à l'aide d'un tableur

(a) D'après ce qui précède, à l'aide d'un tableur, simuler 1000 réalisations d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}005$.

Appeler le professeur pour vérification

On remarquera l'aspect chaotique de la série de résultats obtenus.

… et pourtant, le chaos est loin d'être total…

(b) Calculer la moyenne et l'écart-type sur cet échantillon de taille 1000.

(c) Réaliser ainsi 10 simulations de taille 1000 avec à chaque fois le calcul de la moyenne et de l'écart-type.

(d) Représenter graphiquement les deux séries des 10 moyennes et écart type ; indiquer la valeur autour de laquelle fluctuent les moyennes et écart type observés.

Appeler le professeur pour vérification

3. Il s'agit ici de retrouver ces observations par le calcul analytique.

(a) Montrer que l'espérance mathématique de T, notée $E(T)$, et qui vaut $E(T)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t s\times f(s)ds$, où f est la fonction de densité de T est remarquablement égale à $\frac{1}{\lambda}$.

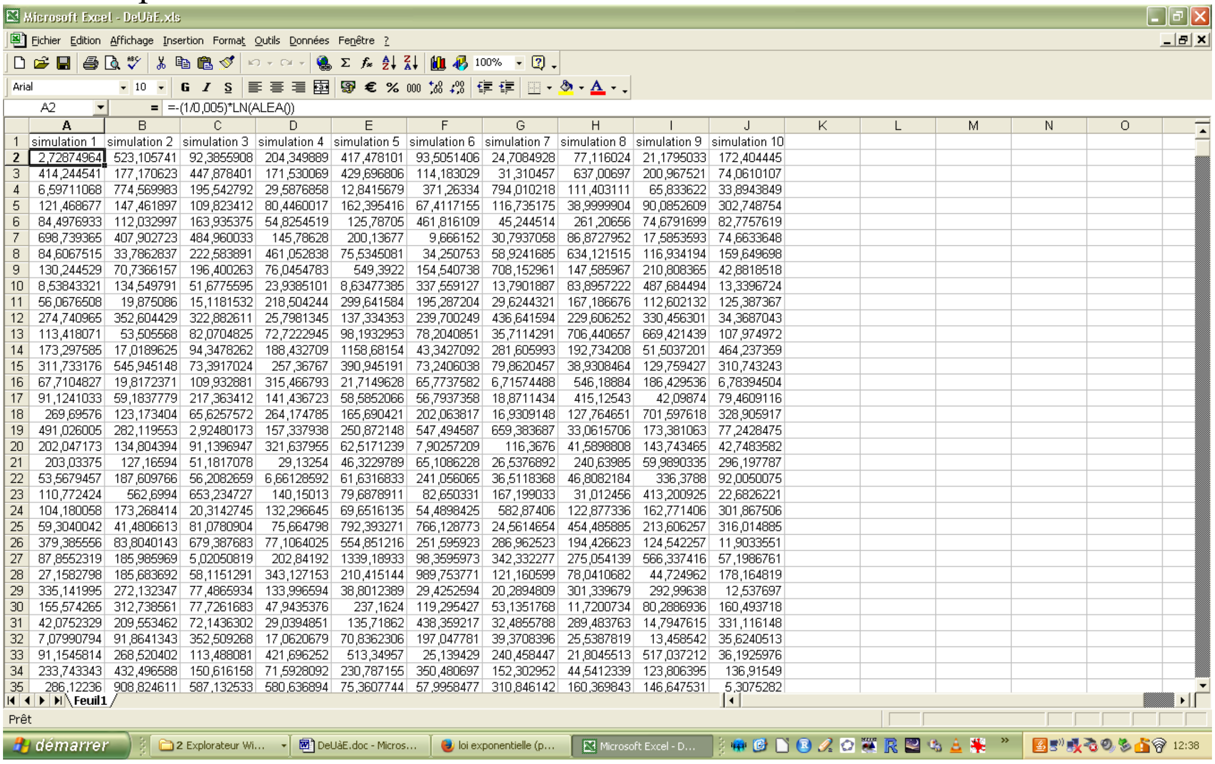
(b) Conclure. *On admet que la variance $V(T)$, pouvant être calculée grâce à la formule de Huiguens-König $V(T)=E(T^2)-[E(T)]^2$, est égale à $\frac{1}{\lambda^2}$.*

Production attendue

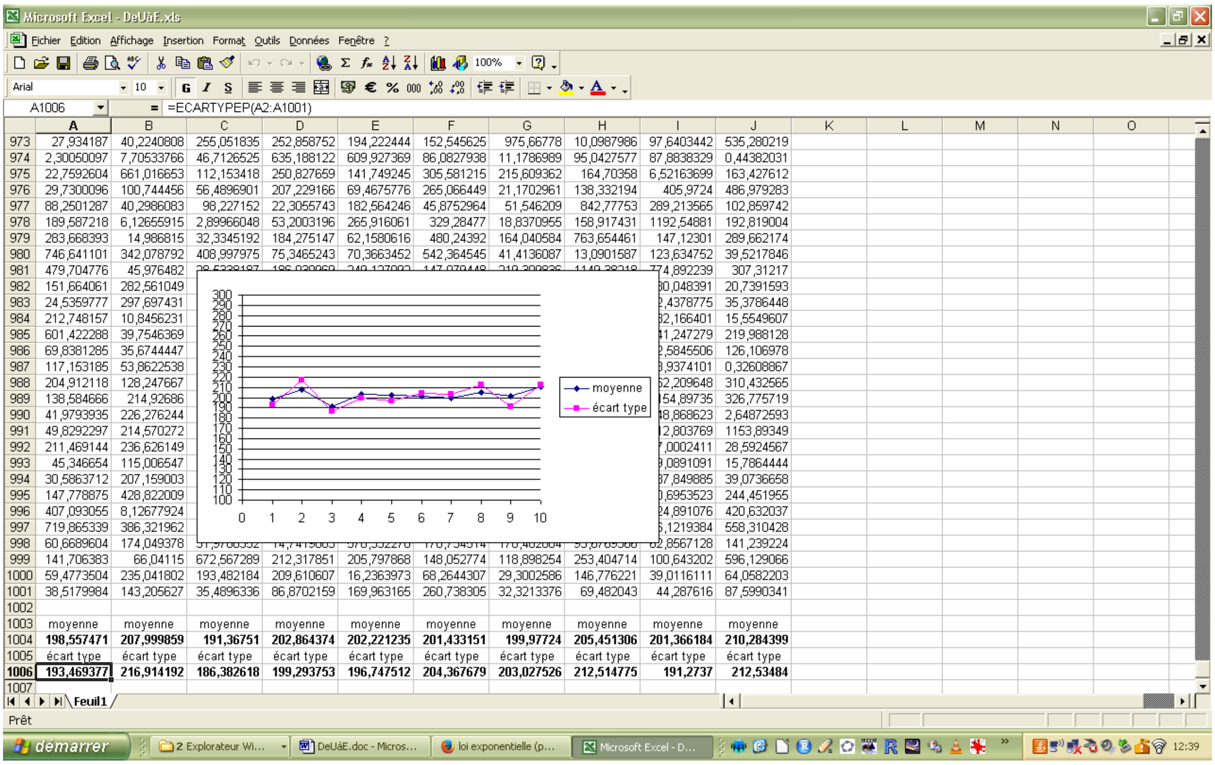
- Obtention à l'écran du tableau de la simulation.
- Réponses écrites aux questions **1** et **3**.

[1] Inspiré par P. DUTARTE, « L'induction statistique au lycée illustrée par le tableur », Didier 2005.

Un exemple de traitement…



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	simulation 1	simulation 2	simulation 3	simulation 4	simulation 5	simulation 6	simulation 7	simulation 8	simulation 9	simulation 10
2	2,72874964	523,105741	92,3855908	204,349889	417,478101	93,5051406	24,7084928	77,116024	21,1795033	172,404445
3	414,244541	177,170623	447,878401	171,530069	429,696806	114,183029	31,310457	637,00697	200,967521	74,0610107
4	6,59711068	774,569983	195,542792	29,5876858	12,8415679	371,26334	794,010218	111,403111	65,833622	33,8943849
5	121,468677	147,461897	109,823412	80,4460017	162,395416	67,4117155	116,735175	38,9999904	90,0852609	302,748754
6	84,4976933	112,032997	163,935375	54,8254519	125,78705	461,816109	45,244514	261,20656	74,6791699	82,7757619
7	698,739365	407,902723	484,960033	145,78628	200,13677	9,666152	30,7937058	86,8727952	17,5853593	74,6633648
8	84,6067515	33,7862837	222,583891	461,052838	75,5345081	34,250753	58,9241685	634,121515	116,934194	159,649698
9	130,244529	70,7366157	196,400263	76,0454783	549,3922	154,540738	708,152961	147,585967	210,808365	42,8818518
10	8,53843321	134,549791	51,6775595	23,9385101	8,63477385	337,559127	13,7901887	83,8957222	487,684494	13,3396724
11	56,0676508	19,875086	15,1181532	218,504244	299,641584	195,287204	29,6244321	167,186676	112,602132	125,387367
12	274,740965	352,604429	322,882611	25,7981345	137,334353	239,700249	436,641594	229,606252	330,456301	34,3687043
13	113,418071	53,505568	82,0704825	72,7222945	98,1932953	78,2040851	35,7114291	706,440657	669,421439	107,974972
14	173,297585	17,0189625	94,3478262	188,432709	1158,68154	43,3427092	281,605993	192,734208	51,5037201	464,237359
15	311,733176	545,945148	73,3917024	257,36767	390,945191	73,2406038	79,8620457	38,9308464	129,759427	310,743243
16	67,7104827	19,8172371	109,932881	315,466793	21,7149628	65,7737582	6,71574488	546,18884	186,429536	6,78394504
17	91,1241033	59,1837779	217,363412	141,436723	58,5852066	56,7937358	18,8711434	415,12543	42,09874	79,4609116
18	269,69576	123,173404	65,6257572	264,174785	165,690421	202,063817	16,9309148	127,764651	701,597618	328,905917
19	491,026005	282,119553	2,92480173	157,337938	250,872148	547,494587	659,383687	33,0615706	173,381063	77,2428475
20	202,047173	134,804394	91,1396947	321,637955	62,5171239	7,90257209	116,3676	41,5898808	143,743465	42,7483582
21	203,03375	127,16594	51,1817078	29,13254	46,3229789	65,1086228	26,5376892	240,63985	59,9890335	296,197787
22	53,5679457	187,609766	56,2082659	6,66128592	61,6316833	241,056065	36,5118368	46,8082184	336,3788	92,0050075
23	110,772424	562,6994	653,234727	140,15013	79,6878911	82,650331	167,199033	31,012456	413,200925	22,6826221
24	104,180058	173,268414	20,3142745	132,296645	69,6516135	54,4898425	582,87406	122,877336	162,771406	301,867506
25	59,3040042	41,4806613	81,0780904	75,664798	792,393271	766,128773	24,5614654	454,485885	213,606257	316,014885
26	379,385556	83,8040143	679,387683	77,1064025	554,851216	251,595923	286,962523	194,426623	124,542257	11,9033551
27	87,8552319	185,985969	5,02050819	202,84192	1339,18933	98,3595973	342,332277	275,054139	566,337416	57,1986761
28	27,1582798	185,683692	58,1151291	343,127153	210,415144	989,753771	121,160599	78,0410682	44,724962	178,164819
29	335,141995	272,132347	77,4865934	133,996594	38,8012389	29,4252594	20,2894809	301,339679	292,99638	12,537697
30	155,574265	312,738561	77,7261683	47,9435376	237,1624	119,295427	53,1351768	11,7200734	80,2886936	160,493718
31	42,0752329	209,553462	72,1436302	29,0394851	135,71862	438,359217	32,4855788	289,483763	14,7947615	331,116148
32	7,07990794	91,8641343	352,509268	17,0620679	70,8362306	197,047781	39,3708396	25,5387819	13,458542	35,6240513
33	91,1545814	268,520402	113,488081	421,696252	513,34957	25,139429	240,458447	21,8045513	517,037212	36,1925976
34	233,743343	432,496588	150,616158	71,5928092	230,787155	350,480697	152,302952	44,5412339	123,806395	136,91549
35	286,12236	908,824611	587,132533	580,636894	75,3607744	57,9958477	310,846142	160,369843	146,647531	5,3075282



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
973	27,934187	40,2240808	255,051835	252,858752	194,222444	152,545625	975,66778	10,0987986	97,6403442	535,280219
974	2,30050097	7,70533766	46,7126525	635,188122	609,927369	86,0827938	11,1786989	95,0427577	87,8838329	0,44382031
975	22,7592604	661,016653	112,153418	250,827659	141,749245	305,581215	215,609362	164,70358	6,52163699	163,427612
976	29,7300096	100,744456	56,4896901	207,229166	69,4675776	265,066449	21,1702961	138,332194	405,9724	486,979283
977	88,2501287	40,2986083	98,227152	22,3055743	182,564246	45,8752964	51,546209	842,77753	289,213565	102,859742
978	189,587218	6,12655915	2,89966048	53,2003196	265,916061	329,28477	18,8370955	158,917431	1192,54881	192,819004
979	283,668393	14,986815	32,3345192	184,275147	62,1580616	480,24392	164,040584	763,654461	147,12301	289,662174
980	746,641101	342,078792	408,997975	75,3465243	70,3663452	542,364545	41,4136087	13,0901587	123,634752	39,5217846
981	479,704776	45,976482	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	774,892239	307,31217
982	151,664061	282,561049							…0,048391	20,7391593
983	24,5359777	297,697431							…2,4378775	35,3786448
984	212,748157	10,8456231							…2,166401	15,5549607
985	601,422288	39,7546369							…1,247279	219,988128
986	69,8381285	35,6744447							…2,5845506	126,106978
987	117,153185	53,8622538							…3,9374101	0,32608867
988	204,912118	128,247667							…2,209648	310,432565
989	138,584666	214,92686							…54,89735	326,775719
990	41,9793935	226,276244							…48,868623	2,64872593
991	49,8292297	214,570272							…12,803769	1153,89349
992	211,469144	236,626149							…7,0002411	28,5924567
993	45,346654	115,006547							…9,0891091	15,7864444
994	30,5863712	207,159003							…37,849885	39,0736658
995	147,778875	428,822009							…0,6953523	244,451955
996	407,093055	8,12677924							…24,891076	420,632037
997	719,865339	386,321962							…5,1219384	558,310428
998	60,6689604	174,049378	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	…2,8567128	141,239224
999	141,706383	66,04115	672,567289	212,317851	205,797868	148,052774	118,898254	253,404714	100,643202	596,129066
1000	59,4773504	235,041802	193,482184	209,610607	16,2363973	68,2644307	29,3002586	146,776221	39,0116111	64,0582203
1001	38,5179984	143,205627	35,4896336	86,8702159	169,963165	260,738305	32,3213376	69,482043	44,287616	87,5990341
1002										
1003	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne
1004	**198,557471**	**207,999859**	**191,36751**	**202,864374**	**202,221235**	**201,433151**	**199,97724**	**205,451306**	**201,366184**	**210,284399**
1005	écart type	écart type	écart type	écart type	écart type	écart type	écart type	écart type	écart type	écart type
1006	**193,469377**	**216,914192**	**186,382618**	**199,293753**	**196,747512**	**204,367679**	**203,027526**	**212,514775**	**191,2737**	**212,53484**
1007										

MANGANELLI Stéphan
LEGTA « Louis GIRAUD » à Serres
84 200 CARPENTRAS