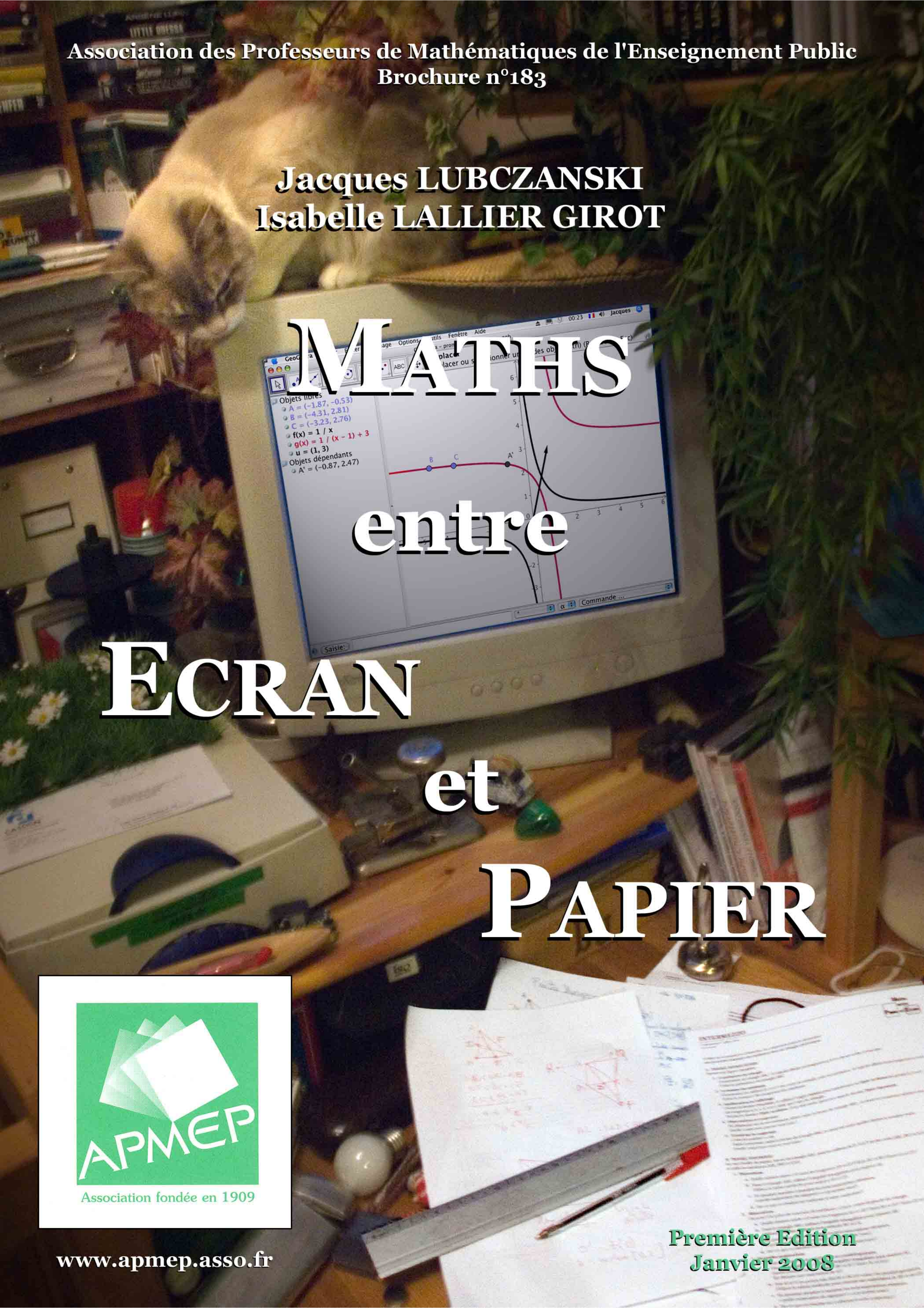
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
Brochure n°183

Jacques LUBCZANSKI
Isabelle LALLIER GIROT

MATHS entre ECRAN et PAPIER



APMEP
Association fondée en 1909

www.apmep.asso.fr

Première Edition
Janvier 2008

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
Brochure n°183

Jacques Lubczanski, alias *Tonton Lulu*
Isabelle Lallier Girot, alias *La Grande Zaza*

Maths entre Ecran et Papier

Première Edition, février 2008

A.P.M.E.P.

l'Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

26 rue Duméril – 75013 Paris

Tél. 01 43 31 34 05 – fax : 01 42 17 08 77 – mel : apmep@apmep.asso.fr

http://www.apmep.asso.fr

Fondée en 1909, toujours dynamique, l'APMEP, c'est :

- **Une réflexion collective** sur le métier d'enseignant de mathématiques et les conditions de son exercice, de la maternelle à l'université, notamment en collège et lycée ;
- **des interventions suivies** sur l'actualité et les projets à moyen terme ;
- **des textes de base** (chartes, problématiques, prospective bac, …) pour des objectifs à long terme ;
- **un observatoire** (EVAPM) de l'impact des programmes du second degré ;
- **des publications de référence** pour apprendre, enseigner, apprendre à enseigner les mathématiques (Bulletin vert, Plot, Brochures, …)
- **une revue pour les « débutants » : PLOT** ;
- **une information rapide des adhérents** : le BGV, un site internet, Publimath, …
- **des instances élues** définissant ses positions ;
- **une organisation décentralisée** en « Régionales » qui ont leurs activités propres et sont les relais entre l'organisation nationale et les adhérents de tous horizons.

L'APMEP agit :

- en réunissant commissions et groupes de travail, sur des thèmes variés, permettant aux adhérents de mettre en commun leur expérience et d'élaborer critiques et propositions ;
- en adoptant sa ligne d'action en accord avec ses adhérents ;
- en la défendant auprès de toutes les instances concernées.

L'APMEP propose ainsi :

- ses choix et des pistes d'action ;
- des outils pour renforcer l'efficacité de l'enseignement de cette discipline.

L'APMEP organise des :

- journées nationales, chaque année sur un site et un thème différents :
  - 2006 : Clermont-Ferrand, *Les mathématiques, un volcan actif ?*
  - 2007 : Besançon : *Le temps des mathématiques, les mathématiques dans leur temps*
  - 2008 : La Rochelle, *Mathématiques en construction.*
- rencontres régionales ;
- séminaires et des « universités d'été »

En adhérant à l'APMEP, vous pourrez :

- participer à la vie de l'association et à la définition des positions qu'elle défend ;
- contribuer à ses productions, les soutenir par la cotisation et toute implication plus poussée ;
- recevoir chez vous les informations d'actualité sur les mathématiques et leur enseignement ;
- **bénéficier de réductions importantes sur toutes les brochures qu'elle propose.**

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

AVERTISSEMENT

La brochure que vous avez sous les yeux est une première version du travail que nous proposons.

Elle contient 18 activités, et nous en avons encore une douzaine en chantier. Entre la conception, la rédaction, la saisie, les relectures, les critiques et les réécritures, chaque activité est le fruit d'une trentaine d'heures de travail, en plus de notre labeur ordinaire d'enseignant de Lycée.

La demande pour ce type d'activités est forte et pressante, aussi avons nous préféré délivrer une première fournée, plutôt que d'attendre que nous ayons eu le temps de tout peaufiner. De toutes façons, un énoncé n'est jamais terminé, ni parfait, car il dépend avant tout de l'usage qu'en fait le professeur, et la disposition d'esprit de ses élèves…

Les activités de cette brochure ont toutes été expérimentées, d'une façon ou d'une autre, auprès d'élèves et de professeurs, au cours des deux dernières années. Mais elles ne sont pas rôdées pour autant : en mettant aujourd'hui ce travail à votre disposition, nous souhaitons obtenir de votre part des remarques et des critiques qui permettront de l'améliorer. Un lien est prévu à cet effet sur le site de l'A.P.M.E.P.

Enfin, nous allons continuer de travailler sur les énoncés qui ne figurent pas encore dans cette brochure, pour l'étoffer dans une seconde édition que nous espérons publier d'ici la prochaine rentrée scolaire.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot
Créteil, le 27 janvier 2008

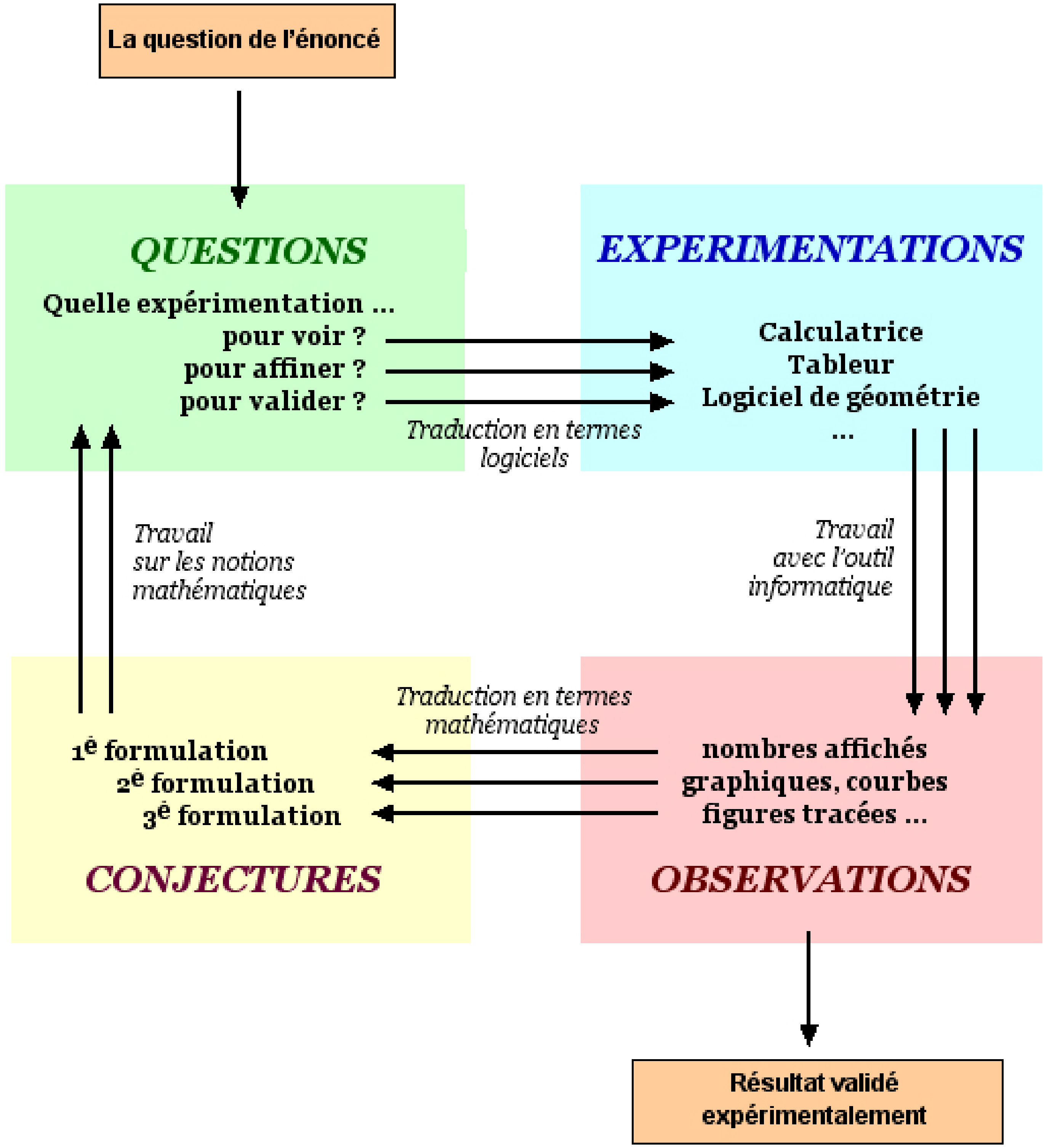
MODE D'EMPLOI EN HUIT QUESTIONS

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

1. **Une brochure pour quoi faire ?**
   Le but de ces activités est d'intégrer dans nos séquences pédagogiques habituelles des séances de travail pratique devant écran. L'idée est de faire progresser les élèves dans leur acquisition des notions du programme, en élargissant la palette des activités proposées par le professeur. Notre objectif va donc au delà d'une préparation spécifique à une épreuve pratique, qui ne posera pas de problème à des élèves ayant travaillé les énoncés de cette brochure .
2. **Faire des maths avec un ordinateur ?**
   La démarche expérimentale est le fondement de l'activité scientifique ; en mathématiques, cette démarche utilise aujourd'hui l'outil logiciel. Le travail pratique fait partie de l'activité mathématique ; il s'appuie sur des notions théoriques et demande rigueur et réflexion. Cette démarche alterne des phases d'observation et d'expérimentation et des phases de conjecture et de questionnement, faisant appel aux notions du cours : c'est un travail d'allers-retours pour formuler, mettre à l'épreuve et affiner une conjecture, qu'on ne cherchera à démontrer que lorsqu'elle aura été validée expérimentalement (voir schéma page suivante).
3. **Que contient cette brochure ?**
   Cette brochure contient dix-huit activités portant sur des notions travaillées en Seconde, en Première S et en Terminale S. Chaque activité comporte des parties théoriques et des parties pratiques : les parties théoriques correspondent à un travail sur papier et les parties pratiques à un travail sur écran. Le travail de l'élève se fera en plusieurs temps et en plusieurs lieux : en classe/à la maison, en salle informatique/en salle banale.
4. **Comment utiliser les énoncés ?**
   Pour chaque activité, nous avons rédigé un énoncé et une « page du prof ». Il y a deux sortes d'énoncés :
   - des énoncés détaillés et directifs, où l'élève peut théoriquement avancer de façon autonome. La page du prof apporte des remarques, des commentaires et des compléments.
   - des énoncés ”ouverts”, qui se réduisent à la question posée, sans donner d'indications : le professeur peut mener l'activité « en direct » avec ses élèves, à l'oral. La page du prof propose alors un déroulement pour mettre en pratique une démarche de recherche, et est accompagnée de la ”spirale du travail pratique”, qui montre le travail sur la conjecture.
5. **Quel travail à rendre pour les élèves ?**
   Dans notre pratique, chaque énoncé donne lieu à un travail écrit de l'élève, constitué de deux parties à rendre ensemble ou séparément selon les cas :
   - un compte rendu des parties expérimentales, avec éventuellement des impressions sur papier.
     Dans ce cas, il faut que le nom de l'élève apparaisse dans le fichier à imprimer
   - une rédaction des parties théoriques

   Autrement dit, c'est une évolution de la forme et du contenu du devoir à la maison : certaines parties auront été travaillées en classe, et d'autres cherchées par l'élève de façon autonome.
6. **Combien de fois dans l'année ?**
   A titre indicatif, les instructions officielles précisent qu'en Terminale S, les élèves devraient utiliser un outil numérique en maths environ une heure par quinzaine. Il nous semble raisonnable de prévoir entre 6 et 10 activités au cours de l'année, qui donneront lieu à autant de devoirs à la maison.
   Nous donnons en début d'énoncé une estimation de l'ampleur du travail : par exemple, l'indication « *ampleur : 1* » correspond à une activité d'environ une heure avec le prof, à moduler en fonction de la façon d'animer la séance et le travail demandé à la maison.
   Les activités de cette brochure concernent la partie des programmes qui se prête le mieux à des aspects numériques ; il reste d'autres parties, et d'autres compétences sur lesquelles il faudra aussi donner des devoirs à la maison.
7. **Avec quels logiciels ?**
   Pour que les élèves puissent travailler chez eux, il faut qu'ils puissent tous avoir un accès gratuit aux logiciels. Notre choix s'est donc porté de façon naturelle sur des logiciels libres, gratuits et multiplateformes, et plus précisément sur Géogébra et le tableur d'OpenOffice. Les énoncés se réfèrent à ces deux logiciels, mais les activités peuvent évidemment être travaillées sur d'autres logiciels.
8. **Quelles compétences logicielles ?**
   Les compétences logicielles nécessaires pour mener à bien les activités sont basiques : ce sont les traductions logicielles des notions mathématiques. C'est très simple avec un logiciel comme Geogebra, qui est conçu pour la classe : on peut facilement créer des variables à l'aide de « curseurs », faire tracer la tangente à une courbe ... et on a simultanément sous les yeux les équations et les courbes. C'est un peu moins simple avec le tableur, conçu au départ pour la comptabilité et pas pour les maths. Mais là on n'utilisera que les fonctions déjà présentes sur une calculatrice de base, plus le recopiage vers le bas et la création de graphiques. Coté matériel, il est indispensable que le professeur dispose d'un projecteur vidéo pour montrer en même temps à tous les élèves les choses qu'il estimera nécessaires.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot



I. Lallier-Girot

LE TABLEUR ET LES MATHS

Le tableur est un puissant outil de calcul et de représentation graphique. Il permet d'effectuer très rapidement des calculs répétitifs, d'obtenir facilement des courbes représentatives. Il permet d'envisager des calculs et des graphiques impensables sur papier, et ouvre ainsi à l'élève les champs de l'observation et de la conjecture.
Cependant, le tableur n'a pas été conçu au départ comme un outil mathématique, mais comme un outil d'entreprise, pour créer des documents comptables. Nous devons faire un effort d'adaptation, et prendre quelques précautions.

LES NOMBRES

Le nom officiel d'une "case" est une "cellule". Le contenu et l'affichage d'une cellule sont deux choses différentes :

- le contenu d'une cellule est ce qu'on y a saisi : un texte, un nombre ou une formule.
  Une formule commence obligatoirement par le signe =
- l'affichage d 'une cellule dépend de son "format" .
  Dans une cellule où il y a une formule, c'est le résultat qui est affiché.

Un nombre peut être affiché avec 15 chiffres significatifs, mais pas plus. Quand le tableur affiche des # à la place des nombres, ce n'est pas une erreur de calcul mais d'affichage : il n'y a pas la place d'afficher tous les chiffres. Il faut alors élargir la colonne.
Les nombres avec lesquels le tableur calcule peuvent être assimilés à des décimaux à 16 chiffres. On peut dire que le tableur calcule en valeur approchée, avec une précision relative égale à 10^{-15}. Comme pour la calculatrice, il s'agit de calculs numériques, et pas de calculs sur les nombres réels des mathématiciens.

FONCTIONS & VARIABLES

Il n'y a pas de variable dans un tableur, il y a des cellules. Une opération ou une fonction s'applique au contenu d'une ou plusieurs cellules. On aura donc besoin de spécifier de quelles cellules il s'agit à l'aide de leurs "adresses". L'adresse d'une cellule est le numéro de sa ligne et le numéro de sa colonne : c'est le nom de la cellule par défaut. On peut dire que dans un tableur, l'adresse d'une cellule joue le rôle de la variable dans l'expression d'une fonction.

Il est naturel de saisir "n" dans la première cellule d'une colonne où on va faire afficher les entiers naturels, et ensuite de saisir "n" dans les formules de calcul. Cela fonctionne dans certains tableurs. Cependant, nous préférons que les élèves s'habituent à rédiger les formules à saisir avec les adresses des cellules plutôt qu'avec un nom, parce que c'est une compétence fondamentale pour utiliser un tableur en maths.

RECOPIAGE & RECURRENCE

Un des intérêts du tableur en maths est la fonctionnalité de "recopiage". Pour pouvoir l'utiliser, il faut savoir distinguer adresses "absolues", adresses "relatives" et adresses "mixtes".

- Les adresses absolues sont celles qui resteront inchangées dans le recopiage.
  Elles sont caractérisées par le symbole $, qui bloque la ligne, la colonne ou les deux à la fois.
- Les adresses relatives seront celles qui seront modifiées et adaptées à la cellule où on recopie.

Le recopiage peut se faire à la souris, mais aussi par les menus (Edition/Remplir dans OpenOffice). C'est utile quand il s'agit de recopier sur une très grande plage de cellules. Par exemple, pour recopier dans la colonne B les entiers naturels de 1 jusqu'à 200 :

- saisir "n" en B1, puis "1" en B2 et "= B2+1" en B3
- sélectionner B3 . Dans la "zone de nom" en haut à gauche, modifier "B3" en "B3 : B201".
  Validez : la plage est sélectionnée.
- sélectionner dans la barre des menus Edition/Remplir/Vers le bas. Validez : le tour est joué !

Le tableur reconnaît automatiquement le début de certaines listes, et en particulier le début de toute suite arithmétique, comme celle des entiers naturels. Nous préférons ne pas faire appel à cet automatisme, et demander systématiquement aux élèves de saisir la formule à recopier, pour qu'ils sachent ce qu'ils sont en train de faire.

Il est intéressant de remarquer que la recopiage vers le bas a quelque chose à voir avec la récurrence. Le fait de pouvoir recopier vers le bas jusqu'à n'importe quelle ligne est la transposition au tableur du principe de récurrence : la première ligne correspond au premier rang, la deuxième ligne à la formule de récurrence.

GRAPHIQUES & COURBES

Le type de graphique utilisé le plus souvent sera le nuage de points, appelé diagramme XY ou XY Dispersion dans OpenOffice, car cela correspond à la notion de courbe représentative. Le repère utilisé par défaut ne sera pas orthonormé. Il nous semble préférable de s'habituer à observer des courbes en repère non orthonormé, plutôt que de s'échiner à le rendre orthonormé : le logiciel n'est pas fait pour ça.

Le tableur affiche des courbes par points, et même par pixels : il ne s'agit pas d'une courbe continue, mais cela nous donne son allure, exactement comme la calculatrice, ou le tracé à la main. Les objets mathématiques sont des abstractions pures ...

GEOGEBRA ET LES MATHS

Le logiciel Geogebra, que nous préconisons, a été conçu pour l'enseignement des mathématiques. Il intègre les objets et les notions que nous travaillons dans nos cours : sa prise en main est facile et rapide, aussi bien pour un élève …que pour un professeur ! Il y a cependant des différences entre l'affichage, le fonctionnement du logiciel et nos habitudes d'écriture, nos habitudes de pensée.

LES NOMBRES

En matière de calcul numérique, Geogebra n'a pas les performances d'une calculatrice ou d'un tableur. Par défaut, il affiche les nombres avec deux décimales, et on peut régler l'affichage jusqu'à 5 décimales. C'est bien suffisant pour le travail que nous avons à faire avec nos élèves.

Dans Geogebra, tout objet saisi a un nom : si vous ne donnez pas de nom à l'objet que vous créez au moment de la saisie, le logiciel lui en donnera un et l'affichera. Vous pouvez changer ce nom après coup par la commande Renommer.

ATTENTION : ***le séparateur pour les décimales d'un nombre n'est pas une virgule mais un point.***

POINTS & VECTEURS

Si vous saisissez deux coordonnées entre parenthèses, séparées par une virgule, vous créez un point. Pour lui donner un nom au moment de sa création, il faut utiliser une lettre majuscule. Si vous utilisez une minuscule, Geogebra crée alors un vecteur. Si vous mettez un point virgule entre les coordonnées d'un point ou d'un vecteur, ce seront alors des coordonnées polaires.

ATTENTION : ***le séparateur entre les coorodonnées n'est pas un point virgule mais une virgule.***

FONCTIONS

Les fonctions se saisissent avec la variable x, en minuscules. Si vous tapez l'expression algébrique de la fonction sans la nommer, Geogebra la nommera automatiquement. On peut donner des noms avec des indices en utilisant le tiret bas, comme dans f_1, qui s'affichera f_1. Geogebra accepte les expressions usuelles des traitements de texte mathématique comme sqrt pour la racine carré, ou l'accent circonflexe pour saisir un exposant.

Geogebra possède un objet particulier : le "curseur", qui correspond à notre notion de variable. Il s'agit d'un nombre prenant des valeurs entre deux bornes fixées , avec un certain pas. Cela permet de faire varier un nombre pour observer comment varient les objets qui en dépendent. L'utilisation la plus simple d'un curseur a est de créer un point M de coordonnées (a, f(a)), où f est une fonction qu'on étudie : bouger le curseur fera se déplacer le point M sur la courbe représentative de la fonction f. Si la fonction a été définie géométriquement, on a l'allure de sa courbe sans passer par son expression algébrique.

ATTENTION : ***Un curseur ne peut pas s'appeler x.***

COURBES

Saisir "y=x+3", ou "d : y=x+3" définit une droite par son équation, mais pas une fonction. De même saisir "y=x^2", ou "p : y=x^2" définit une parabole, mais pas la fonction carré. Cependant, les saisies "y=1/x" et "h : y=1/x" définissent toutes deux la fonction inverse ! Pour définir l'hyperbole en tant que courbe, il faut saisir "h : y*x=1".

En cas de doute, ouvrez la fenêtre Propriétés, par clic droit ou dans le menu Editer : vous trouverez le statut de tous les objets crées, et vous pourrez agir sur chaque objet ou sur une catégorie d'objets. Vous y trouverez aussi les lieux géométriques crées, qui n'apparaissent pas dans la fenêtre Algèbre.

ATTENTION : ***la fonction et sa courbe représentative sont le même objet et ont le même nom.***

OBJETS AUXILIAIRES

Au delà de la catégorie mathématique à laquelle appartient chaque objet, Geogebra possède trois catégories logiques : les Objets libres, les Objets dépendants et les Objets auxiliaires, qui s'affichent dans trois dossiers de la fenêtre Algèbre. Le dossier Objets auxiliaires peut être affiché ou non, et on peut y mettre n'importe quel objet : l'idée est d'y mettre tout ce qui n'a plus besoin d"être affiché dans la fenêtre Algèbre, et de refermer le dossier, ou de le désafficher, pour ne pas encombrer l'affichage. Pour transformer un objet en objet auxiliaire, on passe par l'onglet Algèbre de la fenêtre Propriétés.

APPELS AU SECOURS

Geogebra fait partie de l'univers du logiciel libre. Dans cet univers, on n'est jamais tout seul, et en cas de problème, il suffit d'aller sur le site http ://www.geogebra.org/ où il y a des forums d'utilisateurs qui échangent leurs savoirs faire et se dépannent les uns les autres …

TABLE DES MATIÈRES

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

Légende :

PO : page de l'énoncé type "problème ouvert"
TP : page de l'énoncé détaillé de l'activité
SP : page de la "spirale du travail pratique"
PP : page de la "page du prof"

TEXTES FAISANT APPEL À DES NOTIONS DE LA CLASSE DE SECONDE

TEXTES FAISANT APPEL À DES NOTIONS DE LA CLASSE DE PREMIÈRE

TEXTES FAISANT APPEL À DES NOTIONS DE LA CLASSE DE TERMINALE

ENONCÉS METTANT EN JEU DES NOTIONS DU PROGRAMME DE SECONDE

Les énoncés qui suivent peuvent être posés aussi bien en Seconde qu'en Première ou en Terminale.

Selon la classe et la période de l'année scolaire, l'objectif sera l'acquisition, le renforcement ou la vérification des notions mises en jeu. La durée de l'activité et le partage entre travail en classe et travail à la maison sont aussi des variables à ajuster en fonction de la classe..

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

L'objet de ce travail est d'observer, de conjecturer puis de démontrer
une propriété classique des médianes dans un triangle quelconque.

Dans le travail ci-dessous, le terme *médiane* désigne le segment qui joint un sommet au milieu du coté opposé.

A - TRAVAIL DEVANT ECRAN

Ouvrez une figure Geogebra.

1. **Le périmètre du triangle**
   Construisez un triangle ABC : le logiciel affiche les longueurs de ses cotés, et son aire.
   Créez le périmètre p du triangle ABC.
2. **La somme des médianes**
   Construisez les milieux D, E et F des cotés du triangle, puis ses médianes : le logiciel affiche leurs longueurs.
   Créez la somme s des longueurs des médianes.
3. **Amélioration de l'affichage**
   Ouvrez la fenêtre Propriétés, et utilisez l'onglet Algèbre pour transformer en objets auxiliaires les points D, E et F, les longueurs des cotés et des médianes, ainsi que l'aire du triangle.
   Fermer le dossier Objets auxiliaires : il ne doit rester que p et s dans le dossier Objets dépendants.
4. **Observations et conjecture**
   En déplaçant un de ses sommets, faites varier la forme du triangle ABC, et observez comment varient s et p.
   Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
5. **Travail sur la conjecture**
   Créez le nombre t = s/p.
   Faites à nouveau varier la forme du triangle ABC, et observez entre quelles limites le nombre t varie.
   Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

B- TRAVAIL SUR PAPIER

Sur une feuille de papier, tracez un triangle ABC, puis les milieux de D, E et F des cotés [AB], [BC] et [CA], et enfin les médianes [AE], [BF] et [CD].

1. **Majorations**
   - **a.** Quelle relation existe-t-il entre les longueurs AB et AD ? Entre BC et BE ? Entre CA et CF ?
   - **b.** Dans le triangle ABE, utilisez l'inégalité triangulaire pour majorer AE.
     Utilisez la même méthode pour majorer BF et CD.
   - **c.** En ajoutant membre à membre les trois majorations obtenues,
     à quelle majoration du rapport t = s/p arrivez-vous ?
   - **d.** Est-ce que ce résultat est conforme à votre conjecture ?
2. **Minorations**
   On note G le point de concours de médianes : c'est le *centre de gravité* du triangle.
   - **a.** Quelle relation existe-t-il entre les longueurs AG et AE ? Entre BG et BF ? Entre CG et CD ?
   - **b.** Dans le triangle ABG, utilisez l'inégalité triangulaire pour minorer AB.
     Utilisez la même méthode pour minorer BC et CA.
   - **c.** En ajoutant membre à membre les trois minorations obtenues,
     à quelle minoration du rapport t = s/p arrivez vous ?
   - **d.** Est-ce que ce résultat est conforme à votre conjecture ?
3. **Nouvelles majorations**
   - **a.** Soit L le point tel que CABL soit un parallélogramme.
     Dans le triangle ABL, utilisez l'inégalité triangulaire pour majorer AL.
     Quelle relation existe-t-il entre BL et AC ? Entre AL et AE ?
     En déduire une majoration de AE.
   - **b.** Soit M et N les points tels ABCM et BCAN soient des parallélogrammes.
     Utilisez la même méthode pour obtenir une majoration de BF et de CD.
   - **c.** En ajoutant membre à membre les trois majorations obtenues,
     à quelle majoration du rappport t = s/p arrivez-vous ?
   - **d.** Est-ce que ce résultat est conforme à votre conjecture ?

La page du prof

Longueurs dans le triangle — *Ampleur : 1*
Inégalité triangulaire — *Geogebra*

A - TRAVAIL DEVANT ECRAN

Le travail proposé ici sur Geogebra peut aussi se faire avec un autre logiciel de géométrie :
on a besoin de faire varier la forme d'un triangle, et d'afficher des longueurs et leur somme.

Amélioration de l'affichage
On utilise ici une modalité spécifique à Geogebra : la fenêtre Objets Auxiliaires, qui est une espèce de fourre-tout où on peut placer tout ce qui ne sert plus à rien. Ensuite, on ferme ce dossier (en cliquant dessus), et on n'a plus sous les yeux que ce qui nous intéresse. Pour ceux que ça n'intéresse pas de faire le ménage dans la fenêtre Algèbre, où qui préfèrent fermer cette fenêtre dans une activité de géométrie, on peut aussi créer et afficher un texte où on collera les nombres s, p et t.

Observations et conjectures
Nous sommes ici dans une phase de travail expérimental, où l'élève dispose d'une certaine liberté de mouvement … à la souris. Au cours de l'expérimentation, la question va se poser de savoir si un triangle reste un triangle quand ses sommets sont alignés : c'est un cas limite que nous appellerons "triangle dégénéré", mais triangle quand même, car les trois sommets continuent d'exister. Le passage du "vrai" triangle au triangle "dégénéré" se fait de façon quasi continue à la souris, sans poser de problème existentiel aux élèves. L'important est d'avoir un mot pour en parler, pas de "pinailler" sur une définition.

La première observation est que s reste toujours plus petit que p, mais jamais de beaucoup. Une fois cette constatation faite par l'ensemble des élèves, il faut affiner cette conjecture, et lui donner un aspect plus quantitatif : on crée le rapport t = s/p. On peut alors remarquer que la taille du triangle n'intervient pas dans la valeur du nombre t : pour un triangle deux fois plus grand mais de même forme, s et p seront deux fois plus grands et le rapport t restera le même. Il n'y a donc plus que la forme du triangle qui compte.

Pour animer la recherche, on peut proposer des défis : qui aura la plus grande valeur de t ? La plus petite ? Une notion intéressante à explorer est celle des formes extrêmes que peut prendre le triangle, dont on peut penser intuitivement qu'elles vont amener des valeurs extrêmes pour le rapport t.

B- TRAVAIL SUR PAPIER

Pour cette partie du travail, il nous semble important que l'élève fasse l'effort de refaire la figure sur papier. Cette figure n'a pas besoin d'être très soignée, ni très exacte : c'est un support pour raisonner, pas un but en soi. Elle pourrait être faite à main levée, avec des élèves qu'on aurait habitué à cette pratique …

Dans chacune des trois questions, on va utiliser la même méthode :
– on applique à trois triangles analogues l'inégalité triangulaire :
  dans un triangle, un coté est toujours plus court que la somme des deux autres.
– on ajoute membre à membre les trois inégalités obtenues, et on obtient une inégalité où interviennent neuf longueurs.
– on utilise des égalités entre longueurs pour faire apparaître s et p, puis t dans l'inégalité obtenue.

La première majoration de t utilise les points de la figure, sans avoir besoin d'en construire de nouveaux. Elle n'est pas la meilleure possible, mais c'est le moment d'expliquer que c'est un résultat théorique démontré par le raisonnement : à ce titre, cette majoration est valable pour tous les triangles possibles, passés, présents et futurs, pour les triangles qu'on a déjà tracé et pour ceux qu'on n'a pas tracé, pour tous les triangles qu'on peut imaginer …

La minoration de t passe par la centre de gravité du triangle : ce point était déjà présent sur la figure, mais il n'avait pas encore été nommé. La valeur obtenue est la meilleure possible. Pourtant le rapport t n'atteint jamais 0,75 pour un "vrai" triangle, c'est-à-dire avec trois sommets non alignés. La valeur 0,75 s'obtient pour un triangle "dégénéré" où C est au milieu de [AB]. C'est le cas limite d'un triangle isocèle où le sommet tend vers le milieu de la base. Nous avons choisi de travailler avec des inégalités larges, ce qui inclut les cas des triangles dégénérés.

La seconde majoration nécessite la construction de nouveaux éléments. Mais avec les parallélogrammes, nous restons dans les objets de la géométrie élémentaire connus des élèves. La valeur obtenue est la meilleure : là encore, elle n'est obtenue pour aucun "vrai" triangle, mais pour un triangle "dégénéré" où les sommets B et C sont confondus. C'est le cas limite d'un triangle isocèle où les deux sommets de la base tendent l'un vers l'autre.

UNE FONCTION DEFINIE PAR LA GEOMETRIE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

Dans un repère orthonormé, on considère le point P (3 ; 2).

Soit Q un point quelconque de l'axe des abscisses.
On construit le point R où la droite (PQ) recoupe l'axe des ordonnées.

On note x l'abscisse du point Q, et y l'ordonnée du point R.
On demande d'étudier la fonction $f : x \rightarrow y$

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Etude élémentaire de fonction — *Ampleur : 1*
Tableau de variation ; courbe représentative — *Geogebra*

La question est posée de façon ouverte, sans énoncé détaillé : nous proposons ci-dessous un déroulement possible de la séance.
*La correspondance géométrique Q $\mapsto$ R s'appelle une **projection centrale**, de centre P, de la droite (Ox) sur la droite (Oy).*
En géométrie, la projection centrale fait partie de la famille des homographies,
*d'où le nom de **fonction homographique** donné à la fonction associée :* $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$
Nous donnons à la page suivante d'autres exemples de fonctions homographiques définies
à partir d'une situation de géométrie élémentaire, et qui peuvent être l'objet d'un travail analogue.

1 - LES ETAPES DU TRAVAIL PRATIQUE

A - TABLEAU DE VARIATION

1. **Figure et observations**
   On construit une figure dans *Geogebra*, on fait varier le point Q et on observe comment varie le point R :
   ils varient "en sens inverse" par rapport à l'origine.
   On peut remarquer que si Q est à l'origine, alors R est aussi à l'origine, et que si Q a pour abscisse 3,
   il n'y pas de point R car la droite (PQ) est parallèle à l'axe (Oy).
   Pour être plus précis, on observe dans la fenêtre *algèbre*, comment varie l'ordonnée de R. On peut alors faire un premier tableau de variations issu de l'observation : la fonction n'est pas définie pour $x = 3$, et est toujours décroissante (dans les négatifs, on est plus petit quand on est plus grand en valeur absolue ...).
   On indiquera les bornes effectivement observées, et pas des infinis.
2. **Première conjecture**
   Mettre des limites dans le tableau de variation relève d'une première conjecture : c'est le moment de le dire.
   Pour mettre à l'épreuve cette conjecture, on pousse le point Q au delà des bornes observées :
   – soit en rétrécissant l'unité du repère et en bougeant Q à la souris
   – soit en définissant un curseur q entre des bornes convenables, puis le point Q =(q,o) :
   on pilote alors le déplacement du point Q par le curseur, même s'il n'est plus visible à l'écran.

B - COURBE REPRESENTATIVE

1. **Construction et observation**
   Pour faire apparaître des points de la courbe représentative, on réinvestit les connaissances du cours :
   on définit M = $(x(\mathrm{Q}) ; y(\mathrm{R}))$, et on active sa trace. Faire varier le point Q amène alors l'allure de la courbe qui confirme le tableau de variation observé.
2. **Asymptotes : conjecture et mise à l'épreuve**
   La courbe semble avoir deux asymptotes, dont on peut conjecturer la position. Question : quelle est leur équation ?
   Réponse $x = 3$ et $y = 2$. On les construit pour avoir une confirmation. On utilise la fonction "lieu" pour améliorer la confirmation (*mettre le lieu en rouge pour le distinguer*).

C - EXPRESSION DE LA FONCTION

On se limite dans cette partie à $x \geq 3$.

1. **Construction et observation**
   On construit le rectangle MSPT de diagonale [MP], et de cotés parallèles aux axes :
   pour cela on crée les points S =(3,y(M)) et T=(x(M),2), puis le rectangle MSPT.
   On observe l'aire de ce rectangle lorsque le point Q varie. :
   cette aire semble constante, et égale à 6 unités ; ce sera notre nouvelle conjecture.
2. **Calcul de l'expression**
   L'aire est égale au produit $(x-3) \times (y-2)$. D'après notre conjecture, cela vaut 6.
   On en déduit l'expression : $y = 2 + \dfrac{6}{x-3} = \dfrac{2x}{x-3}$
3. **Mise à l'épreuve**
   On construit la courbe représentative de cette fonction et on observe si elle coïncide avec le lieu de M (*changer l'épaisseur de la courbe pour la voir superposée au lieu*). C'est le cas, d'où la validation expérimentale de l'expression de la fonction. En plus, il semble que cette expression soit valable pour toutes les valeurs de x, et pas seulement pour $x \geq 3$.

Suite de la page du prof

2 - VERS UN TRAVAIL THEORIQUE

Le travail théorique passe par l'application du théorème de Thalès, en distinguant trois cas de figure selon que x est négatif, compris entre 0 et 3 ou supérieur à 3. Il permet de démontrer que l'expression de la fonction est bien celle à laquelle à abouti le travail pratique.

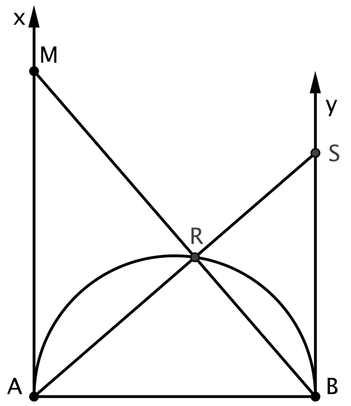
3 - AUTRES EXEMPLES : TROIS FONCTIONS AUTOUR D'UN DEMI CERCLE

Les trois exemples ci-dessous partent de la même configuration géométrique :
un demi cercle et ses tangentes aux extrémités d'un diamètre.
Chaque construction associe à un point M d'une des tangentes un point de l'autre tangente.
Les trois fonctions obtenues sont de la forme $x \mapsto \frac{a}{x}$. Elles sont multiples l'une de l'autre car BS = 2 BQ et BQ = 2 BP.
Le travail géométrique est élémentaire : il y a de nombreux triangles rectangles, et de nombreuses égalités entre les angles.
On peut organiser un travail collaboratif, chaque groupe ou chaque élève travaillant sur une des fonctions,
avec des temps de mise en commun et des temps de synthèse.

On considère un demi-cercle de diamètre [AB],
et les deux demi-droites [Ox) et [Oy) qui lui sont tangentes en A et en B.

Si M est un point de [Ox), on définit :
– le point R où la droite (MB) coupe le demi-cercle
– le point S où la droite (AR) recoupe la demi-droite [Ox)

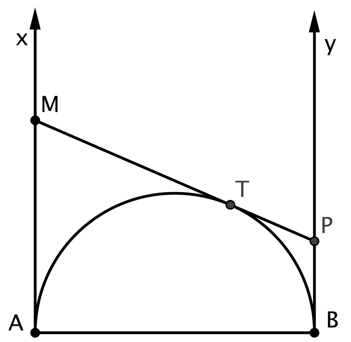
On pose x= AM et y=BS, et on demande d'étudier la fonction $x \to y$



On considère un demi-cercle de diamètre [AB],
et les deux demi-droites [Ox) et [Oy) qui lui sont tangentes en A et en B.

Si M est un point de [Ox), on définit :
– le point de contact T de la tangente au demi-cercle issue de M
– le point P où cette tangente recoupe la demi-droite [Ox)

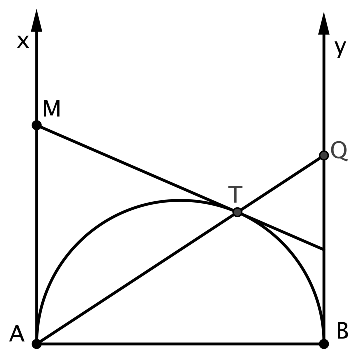
On pose x= AM et y=BP, et on demande d'étudier la fonction $x \to y$



On considère un demi-cercle de diamètre [AB],
et les deux demi-droites [Ox) et [Oy) qui lui sont tangentes en A et en B.

Si M est un point de [Ox), on définit :
– le point de contact T de la tangente au demi-cercle issue de M
– le point Q où la droite (AT) recoupe la demi-droite [Ox)

On pose x= AM et y=BQ, et on demande d'étudier la fonction $x \to y$



PAIRE + IMPAIRE = ?

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

Il y a les fonctions paires, comme $x \mapsto x^2$, les fonctions impaires, comme $x \mapsto {}^1/_x$.
Mais une fonction peut tout à fait être ni paire, ni impaire, et c'est même ce qui arrive la plupart du temps !

L'objectif de ce travail est de montrer sur un exemple comment une fonction quelconque peut se ramener à la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

A - La fonction *h*

On considère la fonction h, définie pour $x \neq 1$, par $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

TRAVAIL SUR PAPIER

Pouvez vous trouver une valeur de x telle que $h(-x) = h(x)$?
Telle que $h(-x) \neq h(x)$? Telle que $h(-x)$ n'existe pas ?
La fonction h est-elle paire ? Est elle impaire ?

B - Les fonctions *p* et *i*

Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on définit à partir de la fonction h deux fonctions p et i de la façon suivante :

$$p(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}$$

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Ouvrez une figure Geogebra.

1. Saisissez la fonction h : sa courbe représentative apparaît.
2. Saisissez $p(x) = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$
   Mettez la courbe en couleur : quelle symétrie observez-vous ?
   Quelle propriété de la fonction p pouvez-vous conjecturer ?
3. Saisissez $i(x) = \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$
   Mettez la courbe en couleur : quelle symétrie observez-vous ?
   Quelle propriété de la fonction i pouvez-vous conjecturer ?

TRAVAIL SUR PAPIER

1. Calculez l'expression algébrique de $p(x)$ en fonction de x.
   Pouvez vous en déduire la symétrie observée pour sa courbe représentative ?
2. Calculez l'expression algébrique de $i(x)$ en fonction de x.
   Pouvez vous en déduire la symétrie observée pour sa courbe représentative ?

C - La fonction *s*

Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on définit à partir des fonctions p et i la fonction s par : $s(x) = p(x) + i(x)$

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Revenez à la figure Geogebra.

1. Faites apparaître la courbe représentative de la fonction s. Qu'observez-vous ?
2. A quelle conjecture conduisent vos observations ?

TRAVAIL SUR PAPIER

1. Calculez l'expression algébrique de $s(x)$ à partir de celles de $p(x)$ et $i(x)$.
2. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, quelle relation pouvez vous en déduire entre les fonctions h, p et i ?
3. Les fonctions p et i s'appellent la "*partie paire*" et la "*partie impaire*" de la fonction h : pourquoi ?

D - Une autre fonction

TRAVAIL SUR PAPIER ET DEVANT ÉCRAN

On considère la fonction g définie sur pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$ par $g(x) = \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{4}{2+x}$.

Trouvez une fonction paire et une fonction impaire dont g est la somme.
Vérifiez votre résultat en construisant leurs courbes représentatives.

La page du prof

Parité et imparité d'une fonction	*Ampleur : 1*
Courbe représentative	*Geogebra*

La correspondance entre une fonction et sa courbe représentative est une notion qu'on travaille à tous les niveaux du Lycée, au point que la courbe devient l'image que nous nous faisons de la fonction : au tableau, le professeur montre la courbe mais c'est de la fonction qu'il est en train de parler ! Face au concept très abstrait de fonction numérique, il est normal et profitable de saisir l'occasion de le représenter par un dessin.

Un logiciel comme Geogebra permet de travailler en même temps sur les aspects algébriques et graphiques : c'est un outil précieux pour mettre en évidence la correspondance entre une fonction sa et courbe. Toutefois, il faut savoir que pour le logiciel, fonction et courbe sont le même objet, désigné par la même lettre : dans le travail pratique fonction et courbe ne font plus qu'un !

L'énoncé propose un travail sur la parité et l'imparité des fonctions, et en particulier sur la propriété :

toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

A - La fonction *h*

Nous savons que face à des propriétés présentées ensemble comme "paire"/"impaire" ou bien "arithmétique"/"géométrique", les élèves ont naturellement tendance à penser que toute fonction est soit paire, soit impaire, ou bien que toute suite est soit arithmétique, soit géométrique. La première question est l'occasion de parler de fonction paire et de fonction impaire, et de s'apercevoir que la fonction h n'est ni l'un ni l'autre, en exhibant des valeurs de x qui forment un contre-exemple.
Remarquons au passage qu'une fonction ne peut-être paire ou impaire que si son domaine de définition est "symétrique" par rapport à 0 : la fonction h, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ne peut donc pas a priori être paire ni impaire.
Mais le but de cette partie était d'abord de manipuler les expressions $h(x)$ et $h(-x)$ qu'on retrouvera dans la suite de ce travail.

B - Les fonctions *p* et *i*

Nous préférons commencer par une approche graphique directe des fonctions p et i, plutôt que par leur expressions algébriques, d'autant que le calcul de ces expressions de $p(x)$ et $i(x)$ n'est pas nécessaire pour tracer leurs courbes représentatives.

En effet, si la fonction h est déjà définie, en saisissant directement $p(x) = \dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{h(x)-h(-x)}{2}$,
on obtient les courbes représentatives de p et de i, et on peut observer leurs symétries.

Lors de la phase suivante de travail sur papier, le calcul des expressions $p(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $i(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$
permet de démontrer que p est paire, et que i est impaire, ce qui explique les symétries observées.

On pourrait démontrer ces propriétés de $p(x)$ et $i(x)$ directement sous la forme $p(x) = \dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{h(x)-h(-x)}{2}$
Mais cela nous semble trop théorique, et fait perdre tout l'intérêt du travail sur l'exemple de la fonction h.

C - La fonction *s*

La fonction $s(x)$ coïncide avec la fonction $h(x)$. L'observation de la coïncidence des courbes est intéressante : "Je n'arrive pas à faire apparaître la courbe de la fonction s ! Ca ne marche pas ! ". Cela peut être l'occasion de montrer comment on peut colorer et épaissir une courbe, pour voir les deux courbes en même temps, la plus fine par dessus la plus épaisse.

Il s'agit ensuite de comprendre la correspondance entre les courbes et les fonctions, et de démontrer ce qu'on a observé.

A nouveau, on pourrait additionner directement $p(x)$ et $i(x)$ sous la forme $p(x) = \dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{h(x)-h(-x)}{2}$,
mais nous n'en sommes pas partisans, pour les mêmes raisons que ci-dessus.
On repart donc des expressions algébriques de p et i, et une simple identité remarquable permet alors de retrouver $h(x)$.

D - Une autre fonction

Cette partie donne l'occasion de vérifier si les élèves ont compris ce qu'ils ont fait avec la fonction h, et s'ils sont capables de faire la même chose avec une autre fonction.

Pour calculer la partie paire et la partie impaire de g, on n'a pas besoin de réduire au dénominateur commun l'expression de $g(x)$.

Par exemple dans le calcul de p, on aura simplement : $g(x)+g(-x) = \left(\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{4}{2+x} + \dfrac{1}{2+x} + \dfrac{4}{2-x}\right) = \left(\dfrac{5}{2-x} + \dfrac{5}{2+x}\right) = \dfrac{20}{4-x^2}$

LA BALLADE DE L'INVERSE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ s'appelle une *hyperbole*.

On va s'intéresser à l'image de cette hyperbole par une translation.
La translation ne change pas la forme des objets : l'image d'une hyperbole par une translation sera une nouvelle hyperbole.
Ce sera la courbe représentative d'une nouvelle fonction : la question posée ici est de déterminer cette nouvelle fonction.

A - UNE PREMIERE METHODE

On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Ouvrez une figure Geogebra.

1. **Construction**
   - **a.** Dans le champ de saisie, tapez $f(x) = {}^{1}/_{x}$: la courbe représentative de la fonction f apparaît.
   - **b.** Créez le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1,3)$.
     Créez un point A sur la courbe.
     Construisez l'image A' de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
     Faites varier A sur la courbe de f, pour vérifier votre construction :
     A' doit décrire une courbe de même forme que celle de A.
2. **Observation**
   - **a.** Tracez le lieu des points A' lorsque A varie : c'est l'image par la translation de la courbe représentative de f.
     Renommez ce lieu H, et coloriez le.
   - **b.** Soit B le point de H d'abscisse 3 : quelle est son ordonnée ?
     Soit D le point de H d'abscisse -3 : quelle est son ordonnée ?

TRAVAIL SUR PAPIER

On suppose que H est la courbe représentative d'une fonction h dont l'expression est de la forme : $h(x) = a + \dfrac{1}{x+b}$.

1. Quelle égalité pouvez vous écrire sachant que B est sur cette courbe ?
   Quelle égalité pouvez vous écrire sachant que D est sur cette courbe ?
2. En soustrayant membre à membre ces deux égalités, calculez la valeur de b^2, puis les valeurs possibles de b.
3. Déterminez l'expression algébrique de $h(x)$.

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Revenez à votre figure Geogebra.

1. Tracez la courbe représentative de h
2. Est-ce que cette courbe confirme l'expression algébrique que vous avez obtenue pour $h(x)$?

B - UNE DEUXIEME METHODE

On considère à présent la translation de vecteur $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$.
On note G l'image par cette translation de la courbe représentative de f ,
et on cherche la fonction g dont G est la courbe représentative.

TRAVAIL SUR PAPIER

1. Soit A un point de la courbe la courbe représentative de f.
   Quelle relation y a-t-il entre l'abscisse x et l'ordonnée y de A ?
2. Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
   Quelles relations y a-t-il entre les coordonnées $(x' \ ; \ y')$ de A' et celles de A ?
3. Utilisez toutes les relations précédentes pour obtenir y' en fonction de x'.
   En déduire l'expression algébrique $g(x)$ de la fonction g.

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Ouvrez une nouvelle figure Geogebra.

1. Tracez les courbes représentatives de la fonction f et de la fonction g
2. Placez un point A sur la première courbe, et le point A' correspondant.
3. Faites varier le point A : quelle est la trajectoire du point A' ?
   Est-ce que cela confirme le résultat de vos calculs ?

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Fonction inverse et translation — *Ampleur : 1*
Courbe représentative — *Geogebra*

On construit l'image par une transformation simple, de la courbe représentative de la fonction inverse.
On cherche ensuite quelle est l'expression algébrique de la fonction ainsi représentée.
Le travail proposé dans ce texte se fait avec une translation. Il est également possible de le faire faire avec une symétrie centrale.

Nous avons choisi d'utiliser la définition d'une courbe représentative comme ensemble des points $(x; f(x))$, car cela nous semble une notion fondamentale pas toujours bien maîtrisée par les élèves.
Il serait possible de trouver plus rapidement l'expression algébrique cherchée en observant les asymptotes, mais cela nous semblerait plus approprié pour des élèves de Première.

Pour trouver l'équation de la nouvelle courbe deux méthodes sont proposées.

A - UNE PREMIERE METHODE

Cette première méthode consiste à construire la courbe H comme l'ensemble des images des points de la courbe de la fonction inverse. Pour trouver l'expression algébrique de la fonction, on utilise la lecture des coordonnées de deux points B et D de la courbe H.

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

1. **Construction** Pour matérialiser les positions du point A', nous proposons que les élèves activent la trace de ce point. On pourrait aussi créer son lieu géométrique, mais cela nous éloignerait de la vision "un point de la courbe de f a pour image un point de la courbe H".
2. **Observation** Pour simplifier les calculs on demande la lecture de points dont les abscisses sont opposées et dont l'ordonnée a une valeur simple et clairement lisible.

TRAVAIL SUR PAPIER

Au niveau Seconde, nous avons choisi de donner la forme de l'expression algébrique de la fonction h : $h(x) = a + \dfrac{1}{x+b}$.
Le travail sur papier permet de réinvestir le fait que si un point est sur la courbe représentative de h,
alors ses coordonnées vérifient $y = h(x)$.

La différence des deux égalités amène $0,75 = \dfrac{-6}{b^2-9}$, ce qui entraîne $b^2 = 1$.
La fin de la résolution permettra de choisir l'une ou l'autre des solutions pour b.

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Ce retour sur écran permet de vérifier que la fonction obtenue a bien pour courbe représentative la courbe tracée précédemment, en remarquant que les deux courbes se superposent.

B - UNE DEUXIEME METHODE

Cette deuxième méthode, est la méthode "classique" de changement de repère.
On n'a pas besoin de donner la forme générale de l'expression algébrique de la fonction cherchée.

Cette fois le travail sur papier précède le travail devant écran, qui en sera une confirmation expérimentale.
On fait ce travail sur un autre exemple, avec la translation de vecteur $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$.

TRAVAIL SUR PAPIER

On utilise le lien entre les coordonnées d'un point et de son image par la transformation proposée,
et le fait que le point de départ est sur la courbe de la fonction inverse.

Le passage de la relation $y = f(x)$ à $y' = y + 4 = f(x+4) = f(x'-1)+4$ conduit â $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + 4$.
On peut ici faire remarquer la décomposition en fonctions de référence de la fonction g.

TRAVAIL DEVANT ÉCRAN

Le travail se termine par la validation visuelle de l'expression obtenue, le travail de l'élève est de comprendre que si le lieu de point et la courbe représentative de g sont confondus, son travail théorique est confirmé expérimentalement.

ENONCÉS METTANT EN JEU DES NOTIONS DU PROGRAMME DE PREMIERE

Les énoncés qui suivent peuvent être posés aussi bien en Première qu'en Terminale.

Selon la classe et la période de l'année scolaire, l'objectif sera l'acquisition, le renforcement ou la vérification des notions mises en jeu. La durée de l'activité et le partage entre travail en classe et travail à la maison sont aussi des variables à ajuster en fonction de la classe..

L'idée du travail ci-dessous provient d'un manuel scolaire de mathématiques hongrois : "*Matematikai fogalmak, tételek*" (Hajnal Imre, Szeged, 1997).

On note u_n la somme des entiers de 1 à n, et v_n la somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$u_n = 1 + 2 + 3 + \ \dots\ + n \quad ; \quad v_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \dots\ + n^2$$

– Observez et étudiez la suite des quotients $w_n = \dfrac{v_n}{u_n}$.

– Pouvez-vous en déduire l'expression de v_n en fonction de n ?

A LA MODE HONGROISE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

L'idée du travail ci-dessous provient d'un manuel scolaire de mathématiques hongrois :
"*Matematikai fogalmak, tételek*" (Hajnal Imre, Szeged, 1997).

On note u_n la somme des entiers de 1 à n, et v_n la somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$u_n = 1+2+3+\ \dots\ +n \quad ; \quad v_n = 1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2$$

L'objectif de ce travail est d'observer et d'étudier la suite des quotients $w_n = \dfrac{v_n}{u_n}$,
pour en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

A - MISE EN PLACE DU CALCUL

1. Ouvrez une nouvelle feuille de classeur. Créer cinq colonnes, intitulées : n, u, n^2, v et w .
2. La ligne sous les entêtes correspondra à $n = 1$: saisir les valeurs correspondantes dans chacune des colonnes.
3. Dans la ligne suivante, saisir les formules qui permettront d'obtenir par recopiage vers la bas
   les valeurs successives de n , u_n , n^2 , v_n et w_n. Recopier vers le bas jusqu'à $n = 20$.

B - OBSERVATIONS ET CONJECTURES

1. **Ecriture décimale de $\mathbf{w_n}$**
   a. Observez les valeurs obtenues pour w_n : qu'est-ce qui est remarquable ?
   b. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'écriture décimale des nombres w_n ?
   c. Recopiez plus loin vers le bas : votre conjecture reste-t-elle valable ?
2. **Nature de la suite $\mathbf{w_n}$**
   a. Créez un graphique représentant w_n en fonction de n.
   b. Quelle allure a ce graphique ? A quel type de suite cela correspond-il ?
   Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite w_n ?
   c. Quelle nouvelle colonne pouvez-vous créer pour mettre à l'épreuve cette conjecture ? Faites le !
3. **Expression de $\mathbf{w_n}$ en fonction de n**
   a. A quelle formule $w_n = f(n)$ conduit votre conjecture précédente ?
   b. Créez une colonne intitulée $f(n)$, où vous saisirez la formule permettant d'obtenir
   les valeurs successives de $f(n)$ par recopiage vers le bas.
   c. Les valeurs obtenues avec la formule $f(n)$ coïncident-elles avec celles obtenues pour w_n ?

C - TRAVAIL THEORIQUE

1. Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
   Déterminez la formule $v_n = g(n)$ à laquelle conduit la conjecture $w_n = f(n)$ obtenue ci-dessus.
2. Cette question a pour but de démontrer la formule $v_n = g(n)$; deux méthodes sont proposées.

   Méthode avec récurrence :
   Démontrez que la formule $v_n = g(n)$ est vraie pour tout n.

   Méthode sans récurrence :
   On note E_n l'égalité : $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$
   Ecrivez les égalités E_n pour n allant de 1 à n. Combien y a-t-il d'égalités ?
   En ajoutant ces n égalités membre à membre, montrez qu'on obtient : $(n+1)^3 = 1+3v_n+3u_n+n$
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n. Est-elle égale à $g(n)$?
3. Est-ce que le résultat précédent démontre la conjecture $w_n = f(n)$?

La page du prof

Suite arithmétique *Ampleur : 1*

Récurrence possible mais pas nécessaire *Tableur*

Cet énoncé a un double objectif :

– au niveau contenu, proposer plusieurs approches expérimentales de la notion de suite arithmétique : variation des décimales des termes, allure du graphique $n \to w_n$. Ces approches débouchent au final sur l'écriture du terme général comme fonction affine de n.

– au niveau méthode, effectuer un véritable travail scientifique d'élaboration et de mise à l'épreuve de conjectures simples issues de l'observation. Le tableur est ici l'outil qui permet facilement ce travail.

La suite (w_n) qu'on va observer et étudier est définie comme le quotient de deux suites classiques, mais ces suites ne sont pas assez familières aux élèves pour qu'il puissent en déterminer immédiatement la nature, ce qui justifie une approche expérimentale.

Nous supposons en particulier que la formule de v_n en fonction de n ne fait pas partie du bagage disponible, puisque ce sera le résultat final de ce travail.

A - MISE EN PLACE DU CALCUL

Dans nos textes, "créer" une colonne signifie simplement saisir un texte en entête dans la première ligne de cette colonne, pour décrire son contenu. Le calcul au tableur des termes u_n et v_n découle de la définition récurrente de ces suites :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, u_n = u_{n-1} + n \ ; \quad v_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, v_n = v_{n-1} + n^2$$

La contenu de la case contenant u_n est la somme des contenus de la case du dessus et de la case de gauche. On n'a pas besoin de l'adressage absolu avec les $. Ce calcul peut-être l'occasion de remarquer que le tableur met en pratique le principe de récurrence : une fois la première valeur saisie, la formule permet le recopiage vers le bas aussi loin qu'on veut, c'est à dire pour tout entier n.

B - OBSERVATIONS ET CONJECTURES

1. **Ecriture décimale de $\mathbf{w_n}$**
   Il apparaît qu'on obtient la suite des impairs tous les trois rangs, et que la partie décimale des autres termes se répète aussi tous les trois rangs. Il est préférable de limiter le nombre de décimales affichées à 2, car le but n'est pas de reconnaître les décimales associées aux tiers, mais d'arriver à formuler une conjecture pour décrire la répétition cyclique d'ordre 3.
2. **Nature de la suite $\mathbf{w_n}$**
   Le graphique est rectiligne : c'est le moment de faire percevoir que d'après ce graphique, quand n augmente d'une unité, w_n augmente toujours de la même quantité, ce qui est le propre d'une suite arithmétique.
   Pour mettre à l'épreuve cette conjecture, on peut créer la colonne des différences d'un terme à l'autre, pour vérifier qu'on obtient toujours le même résultat : ce sera la raison de la suite, qu'on trouvera égale à 0,67 avec l'affichage à 2 décimales.
3. **Expression de $\mathbf{w_n}$ en fonction de n**
   Une fois qu'on a le premier terme 1 et la raison 0,67, on peut établir la formule $w_n = 1 + (n-1) \times 0,67$, et créer une nouvelle colonne pour mettre à l'épreuve cette formule. Il est bon de garder la valeur 0,67 pour la raison car cela provoque un questionnement intéressant : on s'aperçoit que la formule ne donne que des résultats très approchés, et il faut alors se demander pourquoi.
   Une idée naturelle est d'ajouter une ou plusieurs décimales à l'affichage : cela augmente la précision sur la "raison", mais ne résout pas le fond du problème. La solution est de revenir aux nombres impairs consécutifs qu'on a obtenu tous les trois rangs : si on augmente de 2 en trois fois, c'est qu'on augmente de ${}^2/_3$ à chaque fois.
   Ce point acquis, on arrive au bout du travail pratique à la conjecture : $f(n) = 1 + {}^2/_3(n-1)$.
   Pour la suite du travail, il est intéressant de réduire au même dénominateur pour obtenir $f(n) = \dfrac{2n+1}{3}$.

C - TRAVAIL THEORIQUE

La première idée est d'étudier la conséquence de la dernière conjecture sur la formule de la somme des carrés : on connaît la formule de u_n, et on a une formule de w_n, conjecturée et validée expérimentalement. On en déduit une formule pour v_n, qui est donc aussi une conjecture.

La suite du travail consistera à la démontrer, ce qui démontrera par la même occasion la formule obtenue pour w_n :

$$\text{si } u_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et si} \quad v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{alors on a :} \quad w_n = \frac{2n+1}{3}$$

Si les élèves connaissent le raisonnement par récurrence, il leur faut une idée du résultat à démontrer pour pouvoir l'utiliser : c'est précisément ce que fournit la conjecture.

Si les élèves ne connaissent pas encore le raisonnement par récurrence, nous proposons une méthode alternative, parfois appelée "méthode des cascades". C'est une méthode classique : on peut l'utiliser ensuite pour calculer la somme des cubes à partir de celle des entiers et des carrés en écrivant le développement de $(n+1)^4$. On peut continuer ainsi pour calculer toutes le sommes de la forme $1^k + 2^k + 3^2 + \ldots + n^k$, dites "Sommes de Newton" ...

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

La question posée

Etudier la suite $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots+n}$

Mise en oeuvre 1

Calcul sur tableur
de 20 valeurs

Observations 1

Répétition des décimales
Il y a des valeurs entières
La suite est croissante

Conjecture 1

La suite
est arithmétique

Mise à l'épreuve 1

Tester la différence de
deux termes consécutifs

Mise en oeuvre 2

Calcul sur tableur
des différences

Observations 2

Les différences
sont constantes
et égales à 0,67

Conjecture 2

La suite est
arithmétique
de raison 0,67

Mise à l'épreuve 2

Tester la formule
du terme général
$u_n = u_1 + (n-1) \times 0,67$

Mise en oeuvre 3

Calcul sur tableur
des valeurs de w_n
d'après la formule

Observations 3

Les valeurs obtenues
ne coïncident pas !

Conjecture 3

En trois rangs
w_n augmente de 2 :
la raison est $^2/_3$

Mise à l'épreuve 3

Tester la formule
du terme général
$u_n = u_1 + {}^2/_3 \times (n-1)$

Mise en oeuvre 4

Calcul sur tableur
des valeurs de w_n
d'après la formule

Observations 4

Les valeurs obtenues
coïncident.

Conjecture validée expérimentalement

w_n est arithmétique de raison $^2/_3$

Le terme général s'écrit $w_n = \dfrac{2n+1}{3}$

UN EXERCICE DE 1914

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

647 – Le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.(*)

(*) *Cet énoncé est tiré des "Exercices d'Arithmétique" de J. Fitz-Patrick ,1914 (rééd. J. Gabay).*
C'est le 647ème exercice du livre, qui en contient 1223.
A cette époque, l'énoncé d'un exercice se réduisait à la propriété qu'il fallait démontrer.

UN EXERCICE DE 1914

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

L'objectif de ce travail est de retrouver un résultat d'hier avec des outils d'aujourdhui :

Le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Cette phrase constitue l'énoncé n° 647 des "Exercices d'Arithmétique" de J. Fitz-Patrick ,1914 (rééd. J. Gabay) :
le but de cet énoncé est de comprendre et de démontrer cette propriété.

Les calculs nécessaires pourront être faits à la calculatrice ou au tableur.

A - SENSIBILISATION

1. Choisissez à votre bon plaisir cinq entiers à neuf chiffres.
   Calculez leurs racines carrées : est-ce que ce sont des nombres entiers ?
2. **a.** Combien y a-t-il d'entiers à neuf chiffres ?
   b. Combien y a-t-il d'entiers dont le carré est un entier à neuf chiffres ?
3. On appelle "carré parfait" un entier qui est le carré d'un entier.
   a. Combien vaut la probabilité qu'un entier à neuf chiffres tiré au hasard soit un carré parfait ?
   b. Combien faudrait-il tirer au sort d'entiers à neuf chiffres pour espérer que l'un d'entre eux soit un carré parfait ?

B - EXPÉRIMENTATION

1. Choisissez à votre bon plaisir un entier entre 100 et 200.
   Faites le produit de cet entier par les trois entiers suivants, et ajoutez un à ce produit : combien de chiffres a ce nombre ?
   Prenez la racine carrée du résultat : combien y a-t-il de chiffres après la virgule ?
2. Recommencez à partir d'un autre entier.
3. Allez, encore une fois ! Qu'est-ce qu'il y a de remarquable ?

C - CALCULS & GRAPHIQUE

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f(n)$ le produit de n par les trois entiers suivants, augmenté de 1, et $r(n)$ la racine carrée de $f(n)$.

1. Donnez l'expression de $f(n)$ en fonction de n .
2. **a.** Calculez les valeurs de $r(n)$ pour n entre 0 et 10.
   b. Faites le graphique de la fonction $n \to r(n)$ pour n entre 0 et 10.
3. **a.** A quelle courbe ressemble le graphique obtenu ?
   b. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la formule donnant $r(n)$ en fonction de n ?

D - RECHERCHE DE LA FORMULE

1. En utilisant les premières valeurs de n et de $r(n)$, et à partir de la conjecture faite ci-dessus,
   déterminez la formule de $r(n)$ en fonction de n.
2. **a.** Vérifiez que cette formule donne les mêmes résultats que la calcul déjà fait pour n entre 0 et 10.
   b. Vérifiez le pour n entre 100 et 200.
   c. Est-ce que cela suffit pour affirmer que cette formule est exacte pour tout entier naturel n ?
3. **a.** Ecrivez, pour n quelconque, l'égalité entre l'expression de $r(n)$ déduite de $f(n)$ et la formule obtenue ci-dessus.
   b. Pouvez-vous démontrer que cette égalité est vérifiée pour tout entier n ? Concluez.

La page du prof

Trinôme du second degré — *Ampleur : 1*

Système d'équations — *Tableur*

La démarche suivie pour arriver au résultat final est la même, qu'on pose cette activité sous forme de "problème ouvert", ou bien qu'on suive l'énoncé détaillé :

– on vérifie par le calcul que la propriété à démontrer est vraie sur de nombreux exemples.
– on découvre que la racine du "produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1" est un trinôme du second degré en n.
– on détermine les coefficients de ce trinôme, et on vérifie que ça marche sur les exemples déjà calculés.
– on démontre par le calcul littéral l'égalité qui se cache derrière l'énoncé.

Le déroulement de cette démarche de recherche est décrit à la page suivante dans la "spirale du travail pratique".

La seule difficulté rencontrée au cours de cette activité est de sensibiliser les élèves au fait qu'obtenir un carré parfait est un événement rare. En "problème ouvert", on peut évoquer cette question à l'Oral. Dans l'énoncé du T.P. nous avons choisi de prendre le temps de calculer la probabilité qu'un entier de neuf chiffres tiré au sort soit un carré. La notion de probabilité utilisée ici est élémentaire, et ne nécessite pas d'avoir travaillé cette notion au préalable ; c'est une simple question de fréquence. En voici les étapes, sans les justifications :

– il y a $10^9 - 10^8 = 9.10^8$ entiers à neuf chiffres.
– le plus grand carré à neuf chiffres est $31\,622^2$
– le plus petit carré à neuf chiffres est $10\,000^2$
– il y a $31\,622 - 10\,000 + 1 = 21623$ carrés parfaits à neuf chiffres.
– $9.10^8 \div 21623 = 41622$: il y a une chance sur 41622 qu'un entier à neuf chiffres soit un carré parfait.

Sachant qu'on répète cette expérience plusieurs fois, et qu'on tombe à chaque fois sur un carré, la probabilité que cela soit le fait du hasard fond comme neige au soleil ...

En 1638, Galilée, dans le "Dialogue sur deux sciences nouvelles", évoquait déjà la rareté des carrés pour poser le problèmes des infinis de grandeur différentes :

> SALVIATI. C'est bien là une des difficultés qui surgissent quand nous discutons, avec notre esprit fini, des choses infinies, et leur attribuons les épithètes que nous utilisons pour les choses finies et limitées ; ce qui, à mon avis, est incorrect, car j'estime que des épithètes comme «plus grand», «plus petit» et «égal» ne conviennent pas aux grandeurs infinies, dont il est impossible de dire que l'une est plus grande, plus petite ou égale à une autre. Mais voici pour le prouver un raisonnement qui me revient a l'esprit ; pour plus de clarté je vais l'exposer en interrogeant le seigneur Simplicio, qui a formulé la difficulté. Vous savez parfaitement, je suppose, quels nombres sont carrés et quels nombres ne le sont pas.
> SIMPLICIO. Je sais parfaitement qu'un nombre carré provient de la multiplication d'un autre nombre par lui-même ; ainsi quatre, neuf, etc., sont des nombres carrés résultant de la multiplication de deux, trois, etc., par eux mêmes.
> SALV. Fort bien ; et vous savez aussi que comme les produits sont appelés carrés, les facteurs, c'est à dire les termes que l'on multiplie, sont appelés côtés ou racines ; quant aux autres nombres qui ne proviennent pas de nombres multipliés par eux-mêmes, ce ne sont pas des carrés. Par conséquent si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énoncerai, n'est-ce pas, une proposition vraie ?
> SIMP. Très certainement.
> SALV. Si je demande maintenant combien il y a de nombre carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré.
> SIMP. Exactement.
> SALV.. Mais si je demande combien il y a de racines, on ne peut nier qu'il y en a autant que de nombres, puisque tout nombre est la racine de quelque carré ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombre carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y en a autant que de racines, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés. A quoi s'ajoute le fait que la proportion des carrés diminue toujours davantage quand on passe des nombres plus élevés ; si en effet jusqu'à cent il existe dix carrés, c'est-à-dire la dixième partie de tous les nombres, jusqu'à dix mille un centième seulement des nombres sont des carrés, et jusqu'à un million la millième partie seulement ; pourtant, dans un nombre infiniment grand, il faudrait admettre que les carrés sont aussi nombreux que tous les nombres pris ensemble.
> SAGREDO. Qu'en conclure dans ces conditions ?
> SALV. A mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement, que les attributs «égal», «plus grand» et «plus petit» n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies.

(extrait de la traduction Clavelin, Ed. A. Colin, 1972)

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

Travail théorique

Le calcul de a, b et c
à partir de $R(0), R(1)$ et $R(2)$
donne $a = 1$; $b = 3$ et $c = 1$.

Mise en oeuvre 3

On calcule les valeurs
de $n^2 + 3n + 1$
pour n de 1 à 20

Question théorique

Est-ce que $n \longmapsto R(n)$
est une fonction connue ?

Mise en oeuvre 2

On fait apparaître
le graphique de
$n \longmapsto R(n)$

Mise en forme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$F(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$
et $R(n) = \sqrt{F(n)}$

Mise en oeuvre 1

On calcule au tableur
les valeurs de $F(n)$ et
de $R(n)$ pour n de 1 à 20

La question posée

Le produit de quatre
entiers consécutifs,
augmenté de 1,
est un carré parfait.

Conjecture 1

la propriété
à démontrer
est vraie

Observations 1

Les valeurs calculées
pour $R(n)$ sont toutes
des nombres entiers.

Conjecture 2

la fonction $n \longmapsto R(n)$
est de la forme
$R(n) = an^2 + bn + c$

Observations 2

La courbe ressemble
à une parabole

Observations 3

Les valeurs obtenues
sont identiques
aux valeurs
trouvées pour $R(n)$

Conjecture validée expérimentalement

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$$

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Dans le plan muni d'un repère orthonormé
on considère la parabole P d'équation $y = 1,5x^2$,
et une droite d de coefficient directeur égal à 2.

Lorsque la droite d varie dans le plan,
où se trouvent les milieux des points d'intersection de P et de d ?

DIAMETRES CONJUGUES/PARABOLE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

L'objectif de ce travail est d'observer et de démontrer une propriété classique de la parabole.
La parabole fait partie de la famille des "coniques", et toutes les courbes de cette famille partagent cette propriété ...

A - Observations et conjectures

Ouvrez une figure Geogebra.

1. Créez la parabole d'équation $y = 1,5x^2$, et renommez la P.
Créez un curseur q, que vous placerez dans un coin de la figure.
Créez la droite d'équation $y = 2x + q$, et renommez la d

2. Faites varier q, et observez , selon la valeur de q, en combien de points la droite d coupe la parabole P.
Notez vos observations au brouillon.

3. Donnez à q une valeur pour laquelle la droite d coupe la parabole P en deux points.
Créez ces deux points A et B, ainsi que leur milieu C.
Activez la trace du point C ; faites varier q, et observez les positions du point C.
L'ensemble des positions de C s'appelle le *lieu géométrique* de C. On le note L.
Quelle conjecture pouvez-vous formuler sur la nature de L ?

4. Modifiez la borne supérieure du curseur pour permettre à q d'aller jusqu'à 20,
et mettez à l'épreuve votre conjecture : est-elle encore valable ?

5. Faites à nouveau varier q, et observez les coordonnées du point C :
quelle conjecture pouvez-vous formuler sur l'équation de L ?

6. Créez le lieu géométrique L d'après l'équation que vous avez conjecturée.
Est-ce que votre conjecture est confirmée ?

B - Calculs et démonstrations

Soit (P) la parabole d'équation $y = 1,5x^2$, et (d) la droite d'équation $y = 2x + q$, où q est un réel donné.

1. Quelle équation du second degré doit vérifier l'abscisse x d'un point d'intersection de (P) et (d) ?
On notera (E) cette équation.

2. Pour quelle valeur de q l'équation (E) admet-elle une racine double ?
Quelle est alors la position relative de la droite et de la parabole ?

3. Pour quelle valeur de q l'équation (E) admet-elle deux racines distinctes ?
Est-ce que cela recoupe vos observations ?
On note a et b ces racines, A et B les points d'intersection correspondants.

4. Calculez a et b, ainsi que l'abscisse x du milieu C de A et B.
Que pouvez-vous en déduire sur l'ensemble des positions du point C lorsque q varie ?

5. Comparez les conjectures où vous ont menées vos observations
et les résultats obtenus par les calculs et les raisonnements.
S'il y a des différences, comment pouvez vous les expliquer ?

C - Travail sur papier

Rédigez un compte rendu de la partie A et vos réponses aux questions de la partie B.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Dans le plan muni d'un repère orthonormé
on considère l'hyperbole H d'équation $x\,.\,y = 1$,
et une droite d de coefficient directeur égal à -2.

Lorsque la droite d varie dans le plan,
où se trouvent les milieux des points d'intersection de H et de d ?

DIAMETRES CONJUGUES/HYPERBOLE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

L'objectif de ce travail est d'observer et de démontrer une propriété classique de l'hyperbole.
L'hyperbole fait partie de la famille des "coniques", et toutes les courbes de cette famille partagent cette propriété ...

A - Observations et conjectures

Ouvrez une figure Geogebra.

1. Soit H la courbe d'équation $xy = 1$. H est une *"hyperbole"*.
   Pour créer l'hyperbole H, tapez dans le champ de saisie : H : x*y=1
   Créez un curseur q, que vous placerez dans un coin de la figure,
   puis créez la droite d'équation $y = -2x + q$, et renommez la d
2. Faites varier q, et observez , selon la valeur de q, en combien de points la droite d coupe l'hyperbole H.
   Notez vos observations au brouillon.
3. Donnez à q une valeur pour laquelle la droite d coupe l'hyperbole H en deux points.
   Créez ces deux points A et B, ainsi que leur milieu C.
   Activez la trace du point C ; faites varier q, et observez les positions du point C.
   L'ensemble des positions de C s'appelle le *lieu géométrique* de C. On le note L.
   Quelle conjecture pouvez-vous formuler sur la nature de L ?
4. Modifiez les bornes du curseur pour permettre à q d'aller de -20 à 20,
   et mettez à l'épreuve votre conjecture : est-elle encore valable ?
5. Faites à nouveau varier q, et observez les coordonnées du point C :
   quelle conjecture pouvez-vous formuler sur l'équation de L ?
6. Créez le lieu géométrique L d'après l'équation que vous avez conjecturée.
   Est-ce que votre conjecture est confirmée ?

B - Calculs et démonstrations

Soit (H) l'hyperbole d'équation $xy = 1$, et (d) la droite d'équation $y = -2x + q$, où q est un réel donné.

1. De quelle fonction (H) est-elle la courbe représentative ?
   En déduire l'équation du second degré que doit vérifier l'abscisse x
   d'un point d'intersection de (H) et (d). On notera (E_q) cette équation.
2. Pour quelle valeur de q l'équation (E_q) admet-elle une racine double ?
   Est-ce que cela recoupe vos observations ? Comment pouvez-vous expliquer la différence ?
   Quelle est alors la position relative de la droite et de l'hyperbole ?
3. Pour quelle valeur de q l'équation (E_q) admet-elle deux racines distinctes ?
   Est-ce que cela recoupe vos observations ?
   On note a et b ces racines, A et B les points d'intersection correspondants.
4. Lorsqu'elles existent, calculez les racines a et b, puis leur somme et leur produit.
   En déduire l'abscisse x et l'ordonnée y du milieu C de A et B.
   Nota Bene : le nombre q apparaît dans les résultats de cette question.
5. Etablir une relation entre x et y, où q n'intervient pas.
   Que pouvez-vous en déduire sur l'ensemble des positions du point C lorsque q varie ?
   Est-ce que cela recoupe votre conjecture sur l'équation de L ?

C - Travail sur papier

Rédigez un compte rendu de la partie A et vos réponses aux questions de la partie B.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Géométrie cartésienne — *Ampleur : 1*
Equation du second degré — *Géogébra*

Le travail proposé ici se décline en deux variantes : "Parabole" et "Hyperbole". Dans chaque cas, les données ont été choisies pour que les observations ne délivrent pas tout de suite les valeurs exactes recherchées. Les observations doivent être qualitatives avant d'être quantitatives : comprendre que la valeur de q détermine le l'existence des points d'intersections est plus important que de trouver la valeur frontière de q avec "plein de décimales".

C'est pourquoi nous préférons conserver le réglage de l'affichage à deux décimales, et attendre l'étude théorique pour préciser les valeurs cherchées. De même, nous préférons dans un premier temps laisser les réglages par défaut du curseur q (entre -5 et 5 au pas de 0,1), pour ne pas s'éparpiller dans la gestion du logiciel et rester concentré sur la question posée.

L'étude théorique des intersections de la courbe et de la droite débouche sur une équation du second degré. Nous avons choisi de présenter l'hyperbole comme la courbe d'équation $x\,.\,y = 1$ plutôt que $y = {}^1/_x$ pour obtenir directement l'équation du second degré. Cela permet aussi dans Geogebra d'obtenir directement les deux points d'intersection avec d au lieu de devoir utiliser deux fois la commande "intersection".

Sans être indispensable, l'utilisation de la formule de la somme des racines facilite le travail pour la parabole, celle du produit des racines le travail pour l'hyperbole. Les calculs théoriques sont simples pour la variante "Parabole", et un petit peu plus élaborés pour la variante "Hyperbole". Une des variantes pourra être travaillée en classe, et l'autre donnée comme un travail à la maison, pour vérifier les acquis méthodologiques et théoriques des élèves.

L'étude de la droite variable implique un "paramètre" q, mais ce n'est pas une source de difficulté. En effet la partie pratique familiarise les élèves avec les variations de ce nombre q, à travers l'utilisation d'un "curseur", et lui donne une existence visuelle : c'est l'ordonnée à l'origine de la droite d. L'expérience nous a montré que ce nombre variable q n'était pas un problème pour les élèves.

Il est aussi possible de proposer des variantes pour le coefficient directeur de la droite d : on pourra ainsi faire travailler en parallèle les élèves sur des sujets analogues mais différents : cela peut donner lieu à un travail de type "collaboratif", et déboucher sur une synthèse intéressante. Plus précisément, si on note a le coefficient directeur des sécantes (dans le texte $a = 2$ pour la parabole et $a = -2$ pour l'hyperbole), on obtient pour l'ensemble des milieux :

- pour la parabole, c'est la demi-droite incluse dans la droite d'équation $x = \dfrac{a}{3}$ et d'origine le point $\left(\dfrac{a}{3}; \dfrac{a^2}{6}\right)$
- pour l'hyperbole, il faut prendre a négatif ; on trouve alors la réunion de deux demi-droites incluses dans la droite d'équation $y = -ax$ et d'origines les points $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{-a}}; -\sqrt{-a}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{-a}}; \sqrt{-a}\right)$

Un peu de culture mathématique ...

La propriété explorée et étudiée dans ce travail est classique : quand on coupe une conique par des droites parallèles à une direction donnée, les milieux des cordes d'intersection sont alignés sur une autre droite. C'est vrai de façon élémentaire lorsque la conique est dégénérée en deux droites parallèles ou sécantes, ou bien dans le cas du cercle. C'est encore vrai dans le cas général, c'est à dire pour la parabole, l'hyperbole et l'ellipse.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnent les directions de la droite d'où on est parti et de la droite où se trouvent les milieux, ces directions jouent des rôles symétriques : si on recoupe la conique par des droites de vecteur directeur $\vec{v}$, les milieux des cordes d'intersection sont alignés sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On dit que ces directions sont "conjuguées" par rapport à la conique. Dans le cas du cercle, les directions conjuguées sont orthogonales.

Enfin l'ensemble des milieux s'appelle un "diamètre" de la conique : cela généralise aux coniques la notion de diamètre du cercle. Dans toute conique, on aura donc des paires de diamètres conjugués, d'où le titre de cette activité.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

La question posée

Où sont les milieux des points d'intersection de P et de d ?

Mise en oeuvre 1

Construction de P
Création de q
Construction de d

Observations 1

Existence des points d'intersection :
q ≤ −0,8 : pas de point
q = −0,7 : un point ?
q ≥ −0,6 : deux points

Conjecture 1

Il existe une valeur de q à partir de laquelle le milieu C existe

Retour à la question

Construire plusieurs milieux C

Mise en oeuvre 2

Construire le milieu C
Faire varier q
Activer la trace de C

Observations 2

Les milieux C sont alignés sur un segment vertical

Conjecture 2

Les milieux C sont sur une demi-droite verticale

Mise à l'épreuve

Tester d'autres valeurs de q

Mise en oeuvre 3

Modifier les bornes du curseur q jusqu'à 20

Observations 3

Tous les milieux C sont alignés ;
x_C reste constant à 0,67

Conjecture 3

Les milieux C sont sur la droite d'équation $x = 0,67$

Approfondissement

Sur quelle partie de la droite $\Delta : x = 0,67$ se trouvent les milieux ?

Mise en oeuvre 4

Construction de Δ et de l'intersection de Δ et P

Observations 4

L'intersection est le point (0,67 ;0,67)
On a toujours $y_C \geq 0,67$

Conjecture validée expérimentalement

Les milieux sont sur une demi-droite déterminée par $x = 0,67$ et $y \geq 0,67$

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

La question posée

Où sont les milieux des points d'intersection de H et de d ?

Mise en oeuvre 1

Construction de H
Création de q
Construction de d

Observations 1

Existence des points d'intersection :
$|q| \leq 2,7$: pas de point
$|q| = 2,8$: un point ?
$|q| \geq 2,9$: deux points

Conjecture 1

le milieu C existe
si q est en dehors
d'un certain intervalle

Retour à la question

Construire
pour chaque branche
plusieurs milieux C

Mise en oeuvre 2

Construire le milieu C
Faire varier q
Activer la trace de C

Observations 2

Les milieux C sont alignés
sur deux segments situés
sur une droite passant par O

Conjecture 2

Les milieux C sont sur
2 demi-droites incluses dans
une droite passant par O

Mise à l'épreuve

Tester d'autres
valeurs de q

Mise en oeuvre 3

Modifier les bornes du
curseur q entre -20 et 20

Observations 3

Tous les milieux C
sont alignés.
On a $y_C = 2x_C$

Conjecture 3

Les milieux C sont
sur la droite
d'équation $y = 2x$

Approfondissement

Sur quelle partie de
la droite $\Delta : y = 2x$
se trouvent les milieux ?

Mise en oeuvre 4

Construction de Δ
et des intersections
de Δ et H

Observations 4

2 points d'intersection
(-0,71 ;-1,41) et (0,71 ;1,41)
On a toujours $|y_C| \geq 1,41$

Conjecture validée expérimentalement

Les milieux sont sur 2 demi-droites
déterminée par $y = 2x$ et $|y_C| \geq 1,41$

AJUSTEMENT PARABOLIQUE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

L'objectif de ce travail est d'étudier comment on peut "ajuster" une formule à des données.
On suppose qu'à la suite d'une expérimentation, on a obtenu les valeurs suivantes pour deux grandeurs x et y, entre lesquelles on cherche une relation $y = f(x)$:

x	0	1	2	3	4
y	14	7	5	4	6

On supposera que les valeurs extrêmes, pour $x = 0$ et $x = 4$ sont des valeurs imposées par le protocole expérimental, alors que les autres valeurs sont le résultat de l'observation. Autrement dit la formule $y = f(x)$ devra être exacte pour $x = 0$ et $x = 4$, et devra être la meilleure possible pour $x = 1$; $x = 2$; et $x = 3$.
Dans cet exemple, on va chercher une formule $y = f(x)$ du second degré.

A - APPROCHE HEURISTIQUE

On considère les points $A(0;14)$, $B(1;7)$, $C(2;5)$, $D(3;4)$ et E(4 ;6), qui représentent les données dans un repère.
On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, et on note P la parabole représentant la fonction f dans ce repère.

Ouvrir une figure Geogebra.
- Placer les points A, B, C, D, et E.
- Choisir le rapport 1 : 2 pour axeX : axeY, et recadrer la figure.
- Créer trois curseurs, pour a, b et c.
- Définir $f(x) = ax^2 + bx + c$

En faisant varier a, b et c, essayer de faire passer la parabole P par les points A et E ; noter les valeurs trouvées pour a, b et c.

Indication : on peut modifier les valeurs extrêmes des curseurs ...

B - APPROCHE THEORIQUE

1. Calculer c de façon que la parabole P passe par le point A
2. Etablir l'expression de b en fonction de a lorsque la parabole P passe par A et par E.
3. En déduire qu'il faut chercher la fonction f sous la forme : $f(x) = ax^2 - 2(2a+1)x + 14$

C - TRAVAIL PRATIQUE

1. **Allure de la parabole**.
   - Fixer c à sa valeur, et désafficher son curseur
   - Redéfinir b en fonction de a.

   Faire varier a : vérifier que la parabole P passe toujours par A et E.
   Peut-elle passer aussi par un ou plusieurs des points B, C ou D ?
2. **Calcul de l'erreur**.
   Soit F le point de la parabole de même abscisse que B : l'erreur commise en $x = 1$ en utilisant la formule $y = f(x)$ comme relation entre les données vaut $|y_F - y_B|$, c'est à dire la distance BF.
   - Construire les points F, G et H de la parabole dont les abscisses sont celles des points B, C et D.
   - Créer le nombre $u = BF + CG + DH$: c'est l'erreur globale.
3. **Optimisation**. Faire varier a dans l'intervalle $[0;3]$, et observer la valeur de u :
   - Dresser le tableau des variations observées de u pour $a \in [0;3]$. Pour quelle valeur de a l'erreur u est-elle minimale ?
   - Améliorer la précision sur cette valeur en modifiant le pas du curseur. Combien vaut l'erreur u correspondante ?
   - Quelle est alors l'expression numérique de $f(x)$?

D - TRAVAIL THEORIQUE

On part de la formule $f(x) = ax^2 - 2(2a+1)x + 14$

1. **a.** Montrer que l'erreur commise en $x = 1$, en utilisant la formule $y = f(x)$ comme relation entre x et y, vaut $|-3a + 5|$
   b. Etablir l'expression de l'erreur globale u en fonction de a.
2. **a.** Dresser un tableau donnant, selon les valeurs de a, l'expression de u sans valeurs absolues.
   b. Représenter dans un repère la fonction $a \to u$ pour $a \in [0;3]$
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction $a \to u$ pour $a \in [0;3]$.
3. **a.** Quelle est l'expression de $f(x)$ correspondant à la valeur minimale de u ?
   b. Comparer les résultats du travail pratique et du travail théorique.

BONUS

Est-il possible de trouver une formule $y = f(x)$ du troisième degré dont la courbe passe par les cinq points A, B, C, D, et E ?

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

La page du prof

Fonction trinôme — *Ampleur : 2*
Fonction valeur absolue — *Geogebra*

Ajuster une formule à des données observées, c'est chercher une formule théorique décrivant le mieux possible les données. Cette démarche est essentielle dans toutes les sciences : une fois la formule établie, la théorie s'efforcera de justifier sa validité, pour pouvoir en faire une *loi*.
Du pont de vue mathématique, l'ajustement consiste à chercher à faire passer une courbe le plus près possible d'un certain nombre de points donnés. Quand on cherche une droite, cela s'appelle un ajustement linéaire : la *régression linéaire* en statistiques en est un exemple.
C'est une technique purement mathématique, et de nombreux logiciels scientifiques intègrent une fonction d'ajustement : il existe par exemple une "courbe de tendance" dans les tableurs. En général, la mesure de l'écart entre la formule obtenue et les données observées est basée sur un calcul de distance euclidienne.
Le travail proposé ici est l'étude mathématique d'un ajustement parabolique : on va chercher une formule du second degré. L'exemple traité est un exemple d'école : le second degré, le nombre des données et la méthode de calcul de l'erreur correspondent aux techniques dont les élèves disposent. L'essentiel est dans la démarche.
Cet énoncé comporte quatre étapes : deux allers retours entre écran et papier . Il se prête bien à une répartition du travail entre la classe et la maison.

A - APPROCHE HEURISTIQUE

Heuristique signifie qu'on va chercher expérimentalement, en tâtonnant. L'objectif est que l'élève s'approprie la situation en "jouant" avec les curseurs : manipuler trois curseurs en même temps n'est pas facile, mais cela amène une dimension ludique. Il s'agit de trouver une parabole qui passe "à peu près" par tous les points, sans chercher à aller plus loin. L'idée qu'aucune parabole ne passe exactement par les cinq points n'est pas naturelle pour les élèves. Il n'est pas nécessaire d'en parler à ce moment du travail ; ce sera une conséquence de l'approche théorique.

B - APPROCHE THEORIQUE

Un calcul algébrique élémentaire permet de voir que la contrainte de passer par les points A et E laisse un seul degré de liberté à la parabole. Cela se traduit dans formule du second degré par la présence d'un seul paramètre : le nombre a.

C - TRAVAIL PRATIQUE

A présent, il n'y a plus qu'un curseur à manipuler, ce qui permet d'affiner la recherche. C'est le moment où on se rend compte qu'aucune parabole ne passe exactement par les cinq points : il faut développer une stratégie de "meilleure approximation".
Les données ont été calculées pour que cette "meilleure approximation" ne tombe pas sur une valeur décimale simple : c'est volontaire, pour que l'apport de l'étude théorique, qui amènera la valeur exacte cherchée, soit plus perceptible par les élèves.
Nous conseillons donc de laisser le pas du curseur réglé à 0,1 , et d'en rester à la valeur $a = 1,7$ pour la "meilleure approximation".

D - TRAVAIL THEORIQUE

L'erreur globale u est une fonction affine par morceaux de a : on étudie ici une fonction u de la variable a, et non pas x.
La courbe représentative se trace dans un repère où a est en abscisses et u en ordonnées.
Une fois déterminés les intervalles pour a, le tracé est celui de "morceaux" de droites : il suffit de calculer deux points à chaque fois. Le tableau des variations sera une conséquence de ce tracé, et non pas un préalable.
Quand on a trouvé que le minimum de u est obtenu pour $a = {}^{2}/_{3}$, on fixe $a = {}^{2}/_{3}$ et on revient au problème où la variable est x.

BONUS

La recherche d'une courbe $y = f(x)$ du troisième degré est a priori vouée à l'échec, car elle débouche sur un système :
– de cinq équations : les cinq contraintes de passage par un point
– à quatre inconnues : les quatre coefficients du polynôme $f(x)$).
Donc le travail à faire pour trouver une meilleure approximation serait du même type.
Si on veut trouver une formule qui passe exactement par les cinq points, il faut passer au quatrième degré . On obtient :

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{6}x^3 + \frac{29}{4}x^2 - \frac{37}{3}x + 14$$

Mais , d'un point de vue scientifique, cela n'a guère de sens, car si les données sont des valeurs observées, ce ne sont pas des valeurs exactes, mais des valeurs données à la précision de la mesure près. Il n'est donc pas pertinent de compliquer la formule pour la rendre "exacte".

AJOUTEZ VOS VIBRATIONS

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La plus simple des vibrations est l'oscillation sinusoîdale :
elle est décrite mathématiquement par une fonction du type $x \mapsto A\sin(\omega x + \varphi)$.

Le nombre A est positif : c'est l'*amplitude* de la vibration ;
le nombre ω est sa *pulsation*, qui donne sa fréquence, et l'angle φ est son *déphasage*.

L'objectif de ce travail est d'étudier la somme de deux vibrations simples et de même fréquence.

Une question pour commencer

Si a et b sont deux réels positifs, quels sont l'amplitude et le déphasage
des vibrations décrites par les deux fonctions $x \mapsto a\sin x$ et $x \mapsto a\cos x$?

A - EXPERIMENTATION

Ouvrez une figure *Geogebra*.

1. Créez deux nombres : a = 1 et b = 2, puis la fonction $f(x) = a\sin x + b\cos x$.
   Quelle est l'allure de la courbe représentative de f ?
2. Créez un curseur pour le nombre A entre 0 et 10, et un curseur pour l'angle φ entre 0° et 360°.
   Créez la fonction $s(x) = A\sin(x + \varphi)$.
   Ajustez les valeurs de A et de φ de façon à ce que les courbes représentatives de f et de s se superposent.
3. Changez les valeurs de a et b en 3 et 4, et reprenez la question précédente.
4. Changez les valeurs de a et b en 5 et 5, et reprenez la question **2**.
5. Choisissez a votre bon plaisir des valeurs pour a et b, et reprenez la question **2**.

B - CALCULS GEOMETRIQUES

1. Calculez l'hypoténuse et les angles d'un triangle rectangle dont les cotés de l'angle droit mesurent 1 cm et 2 cm.
2. Même question avec 3 cm et 4 cm.
3. Même question avec 5 cm et 5 cm.
4. En comparant les résultats obtenus avec les valeurs de A et de φ obtenues dans l'expérimentation,
   formulez une conjecture sur l'amplitude et le déphasage de la vibration décrite par la fonction $f(x) = a\sin x + b\cos x$.
5. Vérifiez votre conjecture sur les valeurs de a et b que vous avez choisies à la question **A-5**.

C - CALCULS TRIGONOMETRIQUES

1. En utilisant la formule $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$, montrer que :
   si a = $A\cos\varphi$ et b = $A\sin\varphi$, alors les fonctions f et s sont identiques, c'est à dire que pour tout x, $f(x) = s(x)$.
2. Démontrez que si les fonctions f et s sont identiques, alors a = $A\cos\varphi$ et b = $A\sin\varphi$.
3. Etablir les formules donnant A et φ en fonction de a et b.
   Votre conjecture est-elle démontrée ?
4. Appliquez le résultat pour résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation : $\sin x + \sqrt{3}\cos x = {}^{1}/_{2}$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation : $\sin x + \cos x \geq {}^{1}/_{2}$.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Somme de deux fonctions — *Ampleur : 1*
Fonction sinus — *Geogebra*

Quand on ajoute deux oscillations sinusoïdales de même fréquence, on obtient une oscillation sinusoïdale, et encore de même fréquence. On va étudier ici un cas particulier très simple de ce résultat : le cas où les deux oscillations ont entre elles un déphasage égal à un quart de la période. Pratiquement, cela veut dire qu'on va ajouter une fonction sinus et une fonction cosinus, chacune de période 2π, mais ayant des amplitudes différentes.

Une question pour commencer

L'objectif de cette question est que les élèves se rendent compte que la fonction cosinus est une fonction sinus déphasée de $\pi/2$. Si ce point n'est pas évident pour eux, on peut leur faire tracer les deux fonctions, et observer que la "cosinusoide" se déduit de la "sinusoide" par un translation horizontale d'un quart de période, correspondant à la formule $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Bien entendu, cela se voit aussi sur le cercle trigonométrique.

A - EXPERIMENTATION

La partie pratique utilise les curseurs de Geogebra : il s'agit, en jouant sur les curseurs A et φ, de faire coïncider les deux fonctions $f(x) = a\sin x + b\cos x$ et $s(x) = A\sin(x+\varphi)$, où a et b sont données. Pratiquement, il vaut mieux ajuster d'abord l'amplitude A, avant de régler le déphasage φ.

On s'aperçoit qu'il est toujours possible de trouver A et φ de façon à superposer les deux courbes, mais à ce niveau, on ne voit pas encore comment A et φ se déduisent de a et b : on se contentera de noter les résultats obtenus.

B - CALCULS GEOMETRIQUES

Cette partie est là pour amener les élèves à découvrir comment on peut trouver A et φ à partir de a et b, puis à le vérifier sur les exemples déjà traités.

L'idée du triangle rectangle de cotés a et b provient de l'approche classique de cette question, telle que les professeurs de Physique l'enseignaient encore au Lycée il y a quelques années, sous le nom de "diagramme de Fresnel" : on représente une oscillation d'amplitude A et de déphasage φ par un vecteur tournant autour de l'origine, de norme A et d'angle polaire φ.

Dans un tel diagramme, les oscillations $x \mapsto a\sin x$ et $x \mapsto b\cos x$ sont représentées par des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonaux. La somme de ces oscillations est alors donnée par le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$: son amplitude $||\overrightarrow{w}||$est bien l'hypoténuse du triangle rectangle formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Son angle polaire donnera le déphasage de la somme.

Ce diagramme permet de montrer le résultat général sur la somme de deux oscillations sinusoïdales de même fréquence.

Il nous a semblé qu'il n'était pas utile ici de mettre en place tout l'appareillage du diagramme de Fresnel, car nous sommes dans un cas particulier où il suffit de construire des triangles rectangles.

C - CALCULS TRIGONOMETRIQUES

Le travail pratique a permis de mettre au point les formules donnant A et φ à partir de a et b : voici venu le temps de la démonstration, qui va devoir se faire "dans les deux sens", pour établir une équivalence logique.

On utilise ensuite le résultat obtenu pour résoudre une équation et une inéquation trigonométriques.

POINTS EN CROIX

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Dans un repère orthonormé, on considère les points A_n
dont les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ sont définies par :

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = 15{,}5 - 1{,}1y_n \\ y_{n+1} = 1{,}1x_n - 6 \end{cases}$$

Où se trouvent les points A_n ?

POINTS EN CROIX

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

L'objectif de ce travail est d'étudier une suite (A_n) de points du plan, dont les coordonnées $(x_n ; y_n)$ dans un repère orthonormé sont définies par :

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = 15,5 - 1,1 y_n \\ y_{n+1} = 1,1 x_n - 6 \end{cases}$$

A - OU SONT LES POINTS ?

1. Travail pratique

a. Dans une feuille de classeur, calculez les coordonnées de $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{20}$.
Représentez ces points dans un graphique.
Quelle observation pouvez-vous faire sur ces points ?
Quelle conjecture pouvez-vous émettre pour l'ensemble des points (A_n) ?

b. Quels coefficients directeurs pouvez-vous calculer pour tester votre conjecture ?
Effectuez ce calcul : permet-il de confirmer votre conjecture ?

c. Quelle relation entre les coefficients directeurs trouvés pouvez-vous conjecturer à partir de l'observation ?
Testez et concluez.

2. Travail théorique

a. Déterminez l'équation de la droite (d_1) passant par A_0 et de coefficient directeur 4/7,
puis de la droite (d_2) passant par A_1, et de coefficient directeur -7/4

b. Démontrez que si A_n est sur (d_1) , alors A_{n+1} est sur (d_2),
puis que si A_n est sur (d_2) , alors A_{n+1} est sur (d_1).

c. Concluez.

B - COMMENT PASSE-T-ON D'UN POINT AU SUIVANT ?

1. Question préliminaire : calculez les coordonnées du point d'intersection P de (d_1) et de (d_2).

2. Travail pratique

a. Calculez au tableur les distances $\mathrm{PA}_0, \mathrm{PA}_1, \ldots, \mathrm{PA}_{20}$

b. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite de ces distances ?

c. Testez votre conjecture : est-elle vérifiée ?
Pouvez-vous donner l'"expression de la distance PA_n en fonction de n ?

3. Travail théorique

Soit f la transformation du plan qui transforme un point A $(x ; y)$ en un point A'$(x' ; y')$, selon les formules : $\begin{cases} x' = 15,5 - 1,1 y \\ y' = 1,1 x - 6 \end{cases}$

a. Démontrez qu'il existe un point invariant par la transformation f.
Où se trouve ce point par rapport aux points (A_n) ?

b. Soit h l'homothétie de centre P et de rapport 1,1.
Déterminez les formules analytiques de h, puis celles de h^{-1}.

c. Déterminez les formules analytiques de la transformation $q = f \circ h^{-1}$
Démontrez que q est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Appliquez ce résultat aux points (A_n), et conclure.

La page du prof

Suite de points — *Ampleur : 1*
Géométrie cartésienne — *Tableur*

Que ce soit sous forme d'énoncé ouvert ou d'énoncé détaillé, cette activité comporte a priori deux parties, chacune traitant l'une des deux questions : *"Où sont les points ?"*, et *"Comment passe-t-on d'un point au suivant ?"*.
Dans la première partie, le seul outil utilisé est le coefficient directeur d'une droite.
Dans la seconde partie, on a besoin des formules analytiques d'une homothétie et d'une rotation d'angle 90°.
Si on souhaite faire cette activité avant d'avoir étudié les transformations,
on peut tout à fait se contenter de la première partie, c'est à dire de répondre à la première question.

A - OU SONT LES POINTS ?

1. TRAVAIL PRATIQUE *(voir aussi la spirale page suivante)*

L'idée de cette partie est d'utiliser la notion de coefficient directeur pour avancer de façon efficace dans le travail pratique. Il n'est pas naturel pour les élèves de faire appel à cette notion, car elle demande souvent des calculs. Mais le tableur est précisément le bon outil pour effectuer rapidement de nombreux calculs, de façon répétitive.
Les points A_n apparaissent clairement sur deux droites, mais il faut faire attention à l'ordre dans lequel les points se placent sur ces deux droites. En particulier, si on calcule les coefficients directeurs des droites (A_nA_{n+1}), on ne trouvera que deux valeurs, car les segments $[A_nA_{n+1}]$ sont parallèles à deux directions données, mais ce ne sont pas les directions des droites où sont les points A_n !
Dans le même ordre d'idées, calculer les coefficients directeurs des droites (A_nA_{n+2}) donne bien les deux valeurs -1,75 et 0,57 des coefficients directeurs, mais cela prouve seulement que les segments $[A_nA_{n+2}]$ sont parallèles à deux directions.
C'est seulement le calcul des coefficients directeurs de (A_0A_n) pour n pair et de (A_1A_n) pour n impair qui garantit la position des points (A_n) sur les deux droites.
On n'a pas besoin d'avoir une grande précision sur les coefficients directeurs obtenus : les valeurs -1,75 et 0,57 suffisent largement pour observer et faire des conjectures. Ce n'est que lorsqu'on aura eu l'idée que les droites sont perpendiculaires, qu'on aura intérêt à prendre -7/4 pour un des coefficients, car cela donnera alors la valeur 4/7 pour l'autre.
A ce propos, le graphique fait par le tableur n'est pas a priori dans un repère orthonormé, et les droites peuvent ne pas avoir l'air perpendiculaires. Il faudra alors demander aux élèves de "tirer" sur le graphique pour avoir des unités a peu près égales sur les abscisses et sur les ordonnées, pour "voir" l'angle droit.

2. TRAVAIL THÉORIQUE

Le raisonnement utilisé ici est un raisonnement par récurrence, mais il n'a pas besoin d'être formalisé comme tel pour être compris et expliqué. Autrement dit, on peut traiter cette activité avant d'avoir traité la Récurrence en cours, sans exiger la rédaction formelle de chaque étape du raisonnement. L'essentiel est de comprendre ce qui se passe pour les points (A_n).

B - COMMENT PASSE-T-ON D'UN POINT AU SUIVANT ?

1. QUESTION PRÉLIMINAIRE

On a besoin des coordonnées de P pour avancer le travail pratique. Or ces coordonnées sont difficiles, voire impossibles à lire sur le graphique du tableur. Nous avons donc préféré utiliser les équations des deux droites qu'on a obtenu auparavant.

2. TRAVAIL PRATIQUE

L'intérêt du travail pratique proposé ici est la mise en oeuvre d'un calcul par recopiage de la distance de deux points à partir de leurs coordonnées, puis la découverte inattendue pour l'élève d'une suite géométrique.
La dernière question de cette partie est là pour réinvestir un résultat de cours.

3. TRAVAIL THÉORIQUE

Dans cette partie on étudie la transformation f qui fait passer du point A_n au point A_{n+1}.
Classiquement, on commence par chercher les points invariants : on va retrouver le point d'intersection P des droites trouvées dans la première partie.
A partir de là, et du résultat de la partie pratique, il semble alors naturel d'introduire l'homothétie h de rapport 1,1 et de centre le point P.
La nature géométrique de la transformation f éclaire la situation d'un jour nouveau : on comprend pourquoi les points (A_n) se placent l'un après l'autre sur une des quatre demi-droites issues de P.
Techniquement f est une *similitude*, mais ce mot du vocabulaire de la géométrie n'apporte pas de compréhension supplémentaire de la situation.

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

Mise à l'épreuve 3

Tester le produit
des coef. dir.

Mise en oeuvre 4

Calcul sur tableur
du produit
des coef. dir.

Mise à l'épreuve 2

Tester les coef. dir. de
$(A_0 A_n)$ pour n pair
$(A_1 A_n)$ pour n impair

Mise en oeuvre 3

Calcul sur tableur
des coef. dir.

Mise à l'épreuve 1

Quels sont les points A_n
qui sont alignés
sur la même droite ?

Mise en oeuvre 2

Repérage des coordonnées
des points sur le graphique

La question posée

Etudier la suite de
points $A_n = (x_n; y_n)$,
avec $A_0 = (3; 1)$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = 15,5 - 1,1 y_n \\ y_{n+1} = 1,1 x_n - 6 \end{cases}$$

Mise en oeuvre 1

Calcul sur tableur
des valeurs $(x_n; y_n)$
pour n de 1 à 20

Graphique des
points $A_0 \dots A_{20}$

Conjecture 1

Tous les points A_n
sont alignés
sur deux droites

Observations 1

Ces 21 points
A_n sont alignés
sur deux droites

Conjecture 2

Les points A_n avec n pair
sont sur une des droites
Pour n impair, ils sont
sur l'autre droite

Observations 2

Les points se répartissent
l'un
après l'autre sur
quatre demi-droites

Conjecture 3

Les deux droites sont
perpendiculaires

Observations 3

Les coef. dir. valent
alternativement
0,57 et -1,75

Conjecture validée expérimentalement

Pour n pair, les points A_n sont sur
la droite de coef. dir 4/7 passant par $A_0(3; 1)$
Pour n impair, les points A_n sont sur
la droite de coef. dir -7/4 passant par $A_1(3; 1)$

Observations 4

Le produit vaut -1

ENONCÉS METTANT EN JEU DES NOTIONS DU PROGRAMME DE TERMINALE

Les énoncés qui suivent peuvent être posés en Terminale.

Selon la classe et la période de l'année scolaire, l'objectif sera l'acquisition, le renforcement ou la vérification des notions mises en jeu. La durée de l'activité et le partage entre travail en classe et travail à la maison sont aussi des variables à ajuster en fonction de la classe..

UNE SUITE PRESQUE GEOMETRIQUE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

On considère la suite (q_n) définie par :
$q_0 = 0$, et pour tout n, $q_{n+1} = 2q_n + (-1)^n$

On demande d'étudier la suite (q_n)
en la comparant à la suite des puissances de 2,
qu'on notera $p_n = 2^n$

UNE SUITE PRESQUE GEOMETRIQUE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

On considère la suite (q_n) définie de façon récurrente par :

$$q_0 = 0 \text{ , et pour tout entier naturel } n \geq 1,\ q_{n+1} = 2q_n + (-1)^n$$

L'objectif de ce travail est de découvrir et de démontrer une formule explicite de q_n en fonction de n.

A - TRAVAIL A LA MAIN

Calculer à la main les premières valeurs de q_n jusqu'à $n = 5$.
Est-il possible que la suite (q_n) soit arithmétique ? Géométrique ?

B - TRAVAIL AU TABLEUR

1. **Calcul de trente valeurs**
   Ouvrez une feuille de classeur, créez les colonnes "n" et "q_n".
   Faites calculer et afficher les valeurs de q_n pour n allant de 1 à 30.
   Vérifiez que les premières valeurs coïncident avec celles que vous avez calculé à la main.
2. **Introduction d'une autre suite**
   S'il n'y avait pas le $(-1)^n$, q_{n+1} serait exactement le double de q_n ,
   d'où l'idée de comparer (q_n) à une suite géométrique de raison 2 : la suite des puissances de 2.
   On considère donc la suite (p_n) définie par $p_n = 2^n$
   Faites calculer et afficher les valeurs de p_n pour n allant de 1 à 30 dans la colonne voisine de "q_n".
3. **Création d'un graphique**
   A partir des colonnes "p_n" et "q_n", créez la représentation graphique des points de coordonnées $(p_n ; q_n)$, pour n allant de 1 à 30 : quelle allure a ce graphique ?
   A quel type de relation entre p_n et q_n cela peut-il correspondre ?
   Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'expression de p_n en fonction de q_n ?
4. **Travail sur la conjecture**
   Créez une nouvelle colonne pour tester votre conjecture : est-elle vérifiée ?
   Si elle n'est pas vérifiée, comment pouvez-vous l'améliorer ? La tester à nouveau ? . . .
   A quelle expression de q_n en fonction de n conduit votre dernière conjecture ?
   Créez une nouvelle colonne pour vérifier cette expression

C - TRAVAIL THEORIQUE

Démontrez par récurrence l'expression conjecturée de q_n en fonction de n.

BONUS

Observez simultanément les valeurs de q_n, q_{n+1} et q_{n+2}.
Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la façon dont on peut obtenir q_{n+2} à partir de q_{n+1} et q_n ?
Testez cette conjecture au tableur, et si elle est vérifiée, démontrez là !

La page du prof

Suite numérique — *Ampleur : 1*
Récurrence — *Tableur*

Cette activité est bâtie sur trois idées :

– ***Une idée théorique***

Pour étudier une suite inconnue (q_n), on la compare à une suite connue (p_n), où $p_n = 2^n$.
L'observation de l'alignement des points $(p_n\,;\,q_n)$ dans un repère conduira à s'intéresser aux quotients $\dfrac{p_n}{q_n}$
On en tirera une relation entre les valeurs de p_n et de q_n, puis l'expression de q_n en fonction de n.

– ***Une idée pratique***

Les valeurs de p_n et de q_n croissent très vite avec n.
Nous avons du mal à nous représenter de très grands nombres,
et la comparaison de très grands nombres est difficile par la simple observation de leurs chiffres.
D'où l'idée d'utiliser plutôt un graphique.
On tirera donc profit de la la capacité du tableur à représenter des nuages de points
dont les coordonnées sont les valeurs des deux suites à comparer.

– ***Une idée méthodologique***

La première conjecture naturelle sur la relation entre p_n et q_n est issue du graphique :
puisqu'on observe un alignement sur une droite passant par l'origine, c'est qu'il existe un coefficient a tel que $p_n = a.q_n$.
Cette conjecture va s'avérer fausse : les élèves vont être amenés à remettre en cause leur conjecture,
et à se demander comment l'améliorer.
Etre capable de remettre en question ses hypothèses nous semble pertinent au sein d'une formation scientifique.

Un peu de maths à propos de la suite "presque géométrique" et du Bonus

– Le travail pratique d'abord, puis le travail théorique, conduisent à l'expression :
$$q_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad \text{ou encore} \quad q_n = \frac{1}{3}\,2^n - \frac{1}{3}\,(-1)^n$$
Autrement dit (q_n) est une combinaison linéaire de deux suites géométriques, de raisons 2 et -1.

– L'observation de trois valeurs successives de (q_n) conduit à l'idée que $q_{n+2} = q_{n+1} + 2q_n$.
On peut vérifier cette égalité au tableur et la démontrer par récurrence : c'est l'objet du Bonus.

– L'ensemble des suites (u_n) vérifiant la relation $(\star)$: $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ est un espace vectoriel E de dimension 2.
Une base naturelle de E est formée des deux suites dont les premiers termes sont (0 ; 1) et (1 ; 0),
les termes suivants étant déterminés par le relation $(\star)$.

– Si on cherche s'il y a des suites géométriques dans l'espace E,
la relation $(\star)$ amène une équation du second degré d'inconnue la raison r de la suite :
$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \Leftrightarrow \quad u_0\, r^{n+2} = u_0\, r^{n+1} + 2u_0\, r^n \Leftrightarrow \quad r^{n+2} = u_0\, r^{n+1} + 2r^n \Leftrightarrow \quad r^2 = r + 2$

– Les racines de cette équation sont 2 et -1.
Cela implique que les suites géométriques (2^n) et $(-1)^n$ sont dans l'espace vectoriel E.
Comme elles ne sont pas multiples l'une de l'autre, elles en forment un nouvelle base.
Autrement dit, toute suite (u_n) vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ est une combinaison linéaire de (2^n) et de $(-1)^n$.

– Notre suite (q_n) vérifie $q_{n+2} = q_{n+1} + 2q_n$: elle est dans l'espace E,
où elle est définie par ses deux premiers termes $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$
Il existe donc deux réels a et b tels que pour tout n : $q_n = a \times 2^n + b \times (-1)^n$.
Les deux valeurs $n = 0$ et $n = 1$ nous donnent $0 = a + b$ et $1 = 2a - b$, d'où $a = 1/3$ et $b = -1/3$.
La boucle est bouclée !

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

La question posée

Comparer la suite définie par $q_0 = 0$, et pour tout n, $q_{n+1} = 2q_n + (-1)^n$ et la suite (p_n) définie par $p_n = 2^n$

Mise en oeuvre 1

Calcul sur tableur de 30 valeurs de q_n et p_n

Création du nuage des points $(p_n; q_n)$

Observations 1

Les points sont alignés sur une droite. Cette droite passe par l'origine

Conjecture 1

Il existe un nombre a tel que $p_n = a \times q_n$

Mise à l'épreuve 1

Tester le quotient $\dfrac{p_n}{q_n}$

Mise en oeuvre 2

Calcul sur tableur des quotients $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

Observations 2

Les quotients ne sont pas constants. Ils sont voisins de 3, et s'en rapprochent

Conjecture 1 rejetée
Conjecture 2

La droite a un coef. dir. égal à 3 mais elle ne passe pas par O

Mise à l'épreuve 2

Tester les différences $p_n - 3q_n$

Mise en oeuvre 3

Calcul sur tableur des différences $b_n = p_n - 3q_n$

Observations 3

Les différences valent alternativement +1 et -1

Conjecture 2 rejetée
Conjecture 3

$p_n = 3q_n + (-1)^n$

Mise à l'épreuve 3

Tester la formule du terme général $q_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$

Mise en oeuvre 4

Calcul sur tableur des valeurs de q_n d'après la formule

Observations 4

Les valeurs obtenues coïncident avec celles déjà calculées

Conjecture validée expérimentalement

Expression de q_n en fonction de n :

$$q_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Dans un repère orthonormé, on considère les points A_n
dont les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ sont définies par :

pour $n = 0 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 12,4 \end{cases}$ et pour tout entier $n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n + 2,9 \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n - 4,9 \end{cases}$

Les points A_n sont-ils sur une courbe identifiable ?

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Suite de points dans le plan	*Ampleur : 2*
Géométrie élémentaire	*Tableur et Geogebra*

La question est posée de façon ouverte, sans énoncé détaillé : nous proposons ci-dessous un déroulement possible de la séance.
Ce travail est l'étude d'une suite de points (A_n) définie par des relations de récurrence sur les coordonnées x_n et y_n de ces points.
Nous donnons à la page suivante cinq autres exemples de suites de points qui peuvent donner lieu à un travail analogue, et où les courbes obtenues sont très différentes de celles qu'on obtient ci-dessous.
L'idée de ce travail est de faire des observations et des conjectures sur la nature géométrique des courbes sur lesquelles les points (A_n) semblent se trouver, pour déboucher sur une démonstration.
On pourrait se poser la question de la nature de la transformation géométrique qui fait passer de A_n à M_{n+1}, mais ce n'est pas l'approche que nous avons choisie, pour privilégier une approche plus immédiate, qui permet de faire travailler aux élèves des notions de géométrie élémentaire. En revanche, ce travail est utile après coup pour arriver à une nouvelle perception de la situation.
Les valeurs numériques dans les formules de récurrence ont été soigneusement choisies pour que les valeurs des résultats à trouver ne soient pas évidentes, mais demandent un travail de réflexion.

A - PREMIERE CONJECTURE

1. **Calcul graphique et observations**
   On utilise un tableur pour calculer les coordonnées d'une trentaine de points A_n.
   IMPORTANT : pour améliorer la lisibilité, régler l'affichage à deux décimales, si ce n'est pas le cas par défaut.
   Un graphique en nuage de points (non reliés) donne ensuite l'allure de la figure formée par ces points :
   une courbe fermée régulière.
2. **Conjecture sur la courbe**
   Une conjecture naturelle est celle d'un cercle, même s'il semble aplati :
   en effet, le repère utilisé par le tableur n'est pas a priori orthonormé.
   Quel est son centre ? Quel est son rayon ?
   Si on observe les points du graphique dont l'abscisse ou l'ordonnée est minimale ou maximale, et les points à peu près diamétralement opposés, on peut donner une estimation du rayon et des coordonnées du centre. L'impression du graphique peut permettre d'améliorer la précision , mais on ne pourra guère aller plus loin dans l'observation.

B - AFFINAGE DE LA CONJECTURE

1. **Expérimentation géométrique**
   Combien faut-il de points pour déterminer un cercle ? Trois.
   Pour préciser le cercle conjecturé, on va donc construire le cercle qui passe par les trois premiers points A_0, A_1 et A_2
   Pour cela, on passe sur un logiciel de géométrie, où on construit ces trois points :
   – soit avec leur coordonnées qu'on recopie, avec les deux décimales affichées : (0 ; 12,4) , (-4,54 ; 5,02) et (-3,74 ; -3,61)
   – soit par copier/coller, en faisant attention à la notation de la virgule dans chaque logiciel, qui peut être un point.
   Ensuite, l'intersection de deux médiatrices donne le centre, dont on récupère les coordonnées et on fait apparaître la distance entre ce centre et un des points. En gardant les valeurs affichées à deux décimales, on obtient une conjecture affinée sur le centre et le rayon : C(8,79 ; 1,9) et R= 13,69.
2. **Mise à l'épreuve sur le tableur**
   Pour éprouver cette conjecture, on va utiliser à nouveau le tableur, en créant une colonne donnant la distance de chaque point A_n au centre C conjecturé : il faut obtenir le même rayon pour tous les points. Pour simplifier la formule à saisir et limiter les risques d'erreur, on peut créer deux colonnes, une qui calcule le carré de la distance et l'autre qui calcule la racine de la précédente.
   Résultat : avec deux décimales, les rayons s'affichent à 13,69, 13,70 ou 13,71. Ils ne sont pas tous égaux ... mais presque ! La question que cela pose est celle des trois registres de nombres qu'on manipule : valeurs exactes, valeurs approchées et valeurs affichées.
3. **Un nouvel aller retour ?**
   La bonne idée est de remarquer que les coordonnées de A_2 sont exactes si on garde trois décimales : (-3,744 ; -3,608).
   Un retour dans le logiciel de géométrie, où on corrige les coordonnées de A_2 donne un centre C(8,8 ; 1,9) et un rayon R= 13,7. Si on augmente le nombre de décimales affichées par le logiciel de géométrie, on n'obtient que des zéros supplémentaires, confirmant l'exactitude de ces résultats.
   Un retour dans le tableur où on corrige les coordonnées du centre donne alors tous les rayons égaux, quelque soit le nombre de décimales affichées. On peut si on le souhaite recopier vers le bas pour augmenter le nombre de points A_n, et constater que le rayon ne bouge pas : **la conjecture C(8,8 ; 1,9) et R= 13,7 est validée expérimentalement.**

Suite de la page du prof

C - DEMONSTRATION ET AMELIORATION

1. **Vers une démonstration**
   Une fois la conjecture validée, on peut s'atteler à un travail de démonstration.
   Fondamentalement, il s'agit d'une récurrence ; on démontre que :

   pour n=0 on a : CA_0 =13,7 et pour tout n : CA_n =13,7 $\Longrightarrow$ CA_{n+1} =13,7.

   Il s'ensuit que pour tout n, CA_n =13,7, c'est à dire que tous les points A_n sont sur le cercle.
   Techniquement, il vaut mieux travailler avec les carrés des distances, pour ne pas s'encombrer avec des symboles "racine" : on démontre alors par récurrence que pour tout n : ${CA_n}^2$ =187,69.
   Si la récurrence n'a pas été encore étudiée au moment de ce travail, il nous semble que cela peut être le moment d'en expliquer le principe, même si on ne formalise pas.
   D'ailleurs, le fait de pouvoir recopier vers le bas dans un tableur n'est rien d'autre que l'application du principe de récurrence ...
2. **Amélioration de la conjecture**
   On peut se demander comment on passe géométriquement d'un point A_n au suivant. Revenons à la figure construite dans le logiciel de géométrie : on peut observer, si on l'a tracée, que la médiatrice de A_0A_2 passe par A_1. Si, en plus, on trace les trois médiatrices, on est assez naturellement amené à l'idée qu'on tourne d'un angle égal autour de C pour passer de A_0 à A_1, et de A_1 à A_2. Autrement dit, le passage de A_n à A_{n+1} se ferait par une rotation de centre C.
   Une première mise à l'épreuve de cette conjecture : demander la valeur des angles $\widehat{A_0CA_1}$ et $\widehat{A_1CA_2}$ au logiciel :
   on trouve des valeurs égales entre elles et valant 36,87°.
   On peut remarquer que cette conjecture entraîne la précédente : si on passe de A_n à A_{n+1} par une rotation de centre C, alors tous les points A_n seront sur le cercle de centre C passant par A_0. Cette nouvelle idée nous fait comprendre plus en profondeur la situation. Mais ce n'est encore qu'une conjecture.
3. **Mise à l'épreuve**
   On peut revenir au tableur pour calculer les valeurs des angles $\widehat{A_nCA_{n+1}}$, et vérifier qu'ils sont tous égaux pour les points A_n dont on a obtenu les coordonnées. En pratique, le calcul de ces angles va passer par celui de leur cosinus.
   En effet, le cosinus va être donné à partir du produit scalaire $\overrightarrow{CA_n}.\overrightarrow{CA_{n+1}} = (x_n-8,8)(x_{n+1}-8,8)+(y_n-1,9)(y_{n+1}-1,9)$, qu'il faut diviser par $CA_n \times CA_{n+1} = 13,7^2 = 187,69$. Ces formules ne sont pas compliquées à entrer dans le tableur, par exemple en deux colonnes, l'une pour le produit scalaire, et l'autre pour diviser celui-ci par 187,69. On trouve tous les cosinus égaux à 0,8, et si on cherche à quelle valeur d'angle cela correspond, on retrouve bien 36,87°.
4. **Une nouvelle démonstration**
   Les formules qui donnent x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n sont-elles des formules de rotation ? La réponse est oui, et c'est comme cela qu'a été construite cette activité.
   Selon les connaissances des élèves, on peut alors aller vers une démonstration en établissant les formules théoriques d'une rotation autour de C.
   On sait que dans ces formules apparaissent les sinus et cosinus de l'angle de rotation. Or dans le logiciel de géométrie, si on demande les valeurs du sinus et du cosinus de l'angle $\widehat{A_0CA_1}$, on obtient bien les valeurs 0,6 et 0,8 qui figurent dans les formules, ce qui "explique" la valeur a priori non remarquable trouvée pour l'angle.

D - D'AUTRES EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS ITEREES

Voici d'autres jolis exemples que nous vous invitons à explorer :

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = -0,56x_n - 0,97y_n + 15,60 \\ y_{n+1} = 0,97x_n - 0,56y_n - 9,70 \end{cases}$$

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 6,1 \end{cases} \text{ et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,76x_n - 0,65y_n - 0,27 \\ y_{n+1} = 0,65x_n + 0,76y_n - 5,27 \end{cases}$$

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 50 \\ y_0 = 20 \end{cases} \text{ et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,7x_n - 0,7y_n \\ y_{n+1} = 0,7x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 50 \\ y_0 = 20 \end{cases} \text{ et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,6y_n \end{cases}$$

$$\text{pour } n=0 : \begin{cases} x_0 = 50 \\ y_0 = 20 \end{cases} \text{ et pour tout entier } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,28x_n - 0,86y_n \\ y_{n+1} = 0,86x_n + 0,28y_n \end{cases}$$

LES TROIS MOYENNES

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

A - TRAVAIL PREPARATOIRE

(A chercher avant la séance devant écran).

1. **a.** Calculez la vitesse moyenne d'une auto qui a roulé à 30 km/h , puis à 60 km/h, sur deux tronçons de même longueur. Comparer avec la moyenne des nombres 30 et 60.

b. Calculez la vitesse moyenne d'une auto qui a roulé à a km/h et b km/h sur deux tronçons de même longueur. Cette moyenne s'appelle la moyenne "harmonique" des nombres a et b. La moyenne usuelle s'appelle la moyenne "arithmétique" des nombres a et b.

2. Soit a et b deux réels tels que $b > a > 0$. On note m leur moyenne arithmétique $\dfrac{a+b}{2}$, et on définit leur moyenne harmonique h par la condition : $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{a}$ et de $\dfrac{1}{b}$.

Démontrez les égalités suivantes : **a.** $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ **b.** $m \times h = ab$

Démontrez les inégalités suivantes : **c.** $m > h$ **d.** m et h sont compris entre a et b

B - TRAVAIL EXPERIMENTAL

(Séance devant écran).

On construit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

- u_0 et v_0 sont deux réels donnés
- u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n
- v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n

1. On prend $u_0 = 100$ et $v_0 = 1$. Calculez les premières valeurs de u_n et v_n, et représentez les sur un graphique. Quelles observations pouvez-vous faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?

2. Poursuivez ce travail avec une dizaine d'autres valeurs de u_0 et v_0 que vous choisirez "à votre bon plaisir". Quelles conjectures pouvez-vous faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?

3. Pour chacun des exemples traités, calculez et observez les valeurs de la suite (w_n) définie par $w_n = u_n \times v_n$. Comment cette observation permet-elle d'affiner la conjecture sur les limites éventuelles de (u_n) et (v_n) ?

Compte rendu : dressez un tableau des valeurs de u_0 et v_0 que vous avez testé, en précisant ce que vous avez observé dans chaque cas : sens de variation, limites éventuelles ...
Rédigez vos conjectures sur les suites (u_n) et (v_n) lorsque u_0 et v_0 sont deux réels donnés quelconques.

C - TRAVAIL THEORIQUE

(A rendre pour la prochaine fois, avec le compte rendu de la partie expérimentale).

Dans les questions ci-dessous, on a pris u_0 et v_0 tels que $u_0 > v_0 > 0$.
Indication : utilisez les propriétés démontrées dans le travail préparatoire.

1. **a.** Pourquoi a-t-on, pour tout entier n, l'inégalité $u_n > v_n$?

b. Pourquoi u_{n+1} et v_{n+1} sont-ils compris entre v_n et u_n ?

2. **a.** En déduire que pour tout entier n, on a : $u_n > u_{n+1} > v_{n+1} > v_n$

b. Justifiez les inégalités : $u_n > v_0$ et $u_0 > v_n$

c. Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. **a.** En utilisant la relation entre u_{n+1}, u_n et v_n, prouvez que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

b. Pourquoi est-ce que le produit $u_n \times v_n$ ne dépend-il pas de n ?

c. En déduire l'expression de la limite des suites (u_n) et (v_n) en fonction de u_0 et v_0.

Les résultats de cette partie confirment-ils les observations de la partie expérimentale ?

BONUS : UNE TROISIEME MOYENNE

On définit la moyenne "géométrique" g de deux réels a et b tels que $b > a > 0$ par la formule $g = \sqrt{ab}$.
Cette dénomination est liée au fait que les trois nombres a , g et b forment une progression géométrique.

Pourquoi la moyenne géométrique de deux nombres positifs est-elle toujours comprise entre leur moyenne harmonique et leur moyenne arithmétique ?

La page du prof

Suites numériques — *Ampleur : 2*
Théorème de convergence monotone — *Tableur*

Le travail proposé parle des moyennes usuelles en Mathématiques, ainsi qu'en Physique : la moyenne arithmétique, la moyenne harmonique et la moyenne géométrique.
L'objectif est de retrouver un résultat classique en analyse : les suites obtenues par itération des moyennes arithmétique et harmonique de deux nombres donnés convergent vers la moyenne géométrique de ces nombres.
Par contre, il ne sera pas question de la moyenne de plus de deux nombres, comme la moyenne pondérée par des coefficients, si largement utilisée dans le système scolaire . . .

A - TRAVAIL PREPARATOIRE

Il s'agit ici de découvrir la moyenne harmonique, d'abord sur un exemple numérique simple, puis dans le cas général.
Les propriétés démontrées dans cette partie sont essentielles, car c'est sur elles que s'appuieront les raisonnements de la partie théorique :

m.h = a.b
Cette sympathique propriété permettra de montrer que le produit des termes u_n et v_n est constant.
Le produit $u_n \times v_n$ sera donc égal à $u_0 \times v_0$ pour tout n.
Si les suites (u_n) et (v_n) convergent, le produit de leur limites vaudra alors $u_0 \times v_0$.
Et si ces limites sont égales, leur valeur commune sera forcément $\sqrt{u_0 \times v_0}$,
c'est à dire la moyenne géométrique des deux premiers termes.

m* et *h* sont compris entre *a* et *b
C'est bien le moins qu'on peut attendre d'une moyenne !
Cela permettra de montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

m > h
Cette inégalité est assez surprenante a priori : la moyenne harmonique est toujours plus petite que la moyenne arithmétique. Cela permettra, avec la propriété précédente, de montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.
La moyenne géométrique s'insère entre les deux autres moyennes, ce qui fait que pour des nombres positifs, les trois moyennes sont toujours dans le même ordre. On pose d'ailleurs la question dans le Bonus.

Une fois démontrées, ces propriétés pourront aussi servir pour guider les observations dans la partie expérimentale.

B - TRAVAIL EXPERIMENTAL

Le travail pratique est ici très simple, puisqu' il s'agit de mettre en oeuvre le calcul des termes de deux suites récurrentes,
et de construire un graphique du type $n \mapsto u_n$ où ces deux suites apparaissent.

L'observation de ces deux graphiques permet de visualiser des notions du cours :
un des graphiques est au dessus de l'autre donc on observe que $u_n > v_n$ pour les valeurs de n calculées.
Il y a une "asymptote" commune donc les suites semblent converger vers la même limite.
Un graphique "descend" vers l'asymptote donc la suite est décroissante pour les valeurs de n calculées ;
l'autre "monte" vers l'asymptote donc l'autre suite est croissante pour les valeurs de n calculées.
Attention : ces sens de variations s'observent dès $n = 0$ si on a pris $u_0 > v_0 > 0$.
Mais si on a $u_0 < v_0$ ce n'est à partir du rang 1 qu'on observe ces sens de variation.

Une fois ce travail fait pour des valeurs imposées de u_0 et v_0, c'est le moment de laisser vagabonder les élèves avec des valeurs choisies " à leur bon plaisir".
Le plus facile est de remplacer les valeurs de u_0 et v_0 dans les cellules du tableur et d'observer ce qui change. Mais alors on ne peut pas revenir en arrière sur un exemple déjà traité, par exemple pour observer après coup le produit $u_n \times v_n$. Il nous semble qu'il vaut mieux garder une trace de chaque essai, par exemple en créant une nouvelle "feuille" à chaque nouveau calcul : on copie la feuille précédente, et on changeant les valeurs de u_0 et v_0 dans la nouvelle feuille.

Le but est qu'au bout d'un certain nombre d'exemples, les élèves soient capables d'émettre des conjectures fiables sur ce qui se passe quelles que soient les valeurs de u_0 et v_0.

C - TRAVAIL THEORIQUE

Le travail théorique ne présente pas de difficultés particulières.
Nous n'avons pas besoin ici de la notion de "suites adjacentes", ni du théorème de cours correspondant ;
mais cela n'empêche évidemment pas de profiter de ce travail pour montrer que (u_n) et (v_n) en sont un exemple.

RENCONTRE AVEC UNE FONCTION REMARQUABLE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

Le sujet de l'exercice ci-dessous provient du "Recueil de problèmes de mathématiques à l'usage des classes de Mathématiques Elémentaires" de Charles Ange Laisant, paru en 1893. Ces classes de "Math-Elem" , comme on les appelait familièrement, étaient les Terminales Scientifiques de l'époque. Elles ont porté ce nom jusqu'en 1971.

Aujourd'hui, pour résoudre cet exercice, il faut combiner plusieurs approches ...

LA QUESTION POSÉE :

On considère, pour $0 < x < \pi/2$ et $x \neq \pi/3$, la fonction $f(x) = \dfrac{\tan^3 x}{\tan(3x)}$

Pour quelles valeurs de x est-ce que la fonction f admet un maximum ou un minimum ?

A - TRAVAIL PRATIQUE

1. Faites apparaître la courbe représentative de f sur $I =]0\,;\pi/3[$.
Quelle approximation pouvez-vous donner de la valeur a pour laquelle f semble avoir un maximum ?
Donnez aussi une approximation de la valeur de ce maximum.
2. Faites apparaître la courbe représentative de f sur $J =]\pi/3\,; \pi/2[$.
Quelle approximation pouvez-vous donner de la valeur b pour laquelle f semble avoir un minimum ?
Donnez aussi une approximation de la valeur de ce minimum.
3. Convertir les approximations de a et de b en degrés, à 0,1° près.
Formulez une conjecture sur les valeurs de a et b.
4. Avec x en degrés et un pas de 0,1°, dressez un tableau de valeurs de la fonction f
au voisinage des valeurs conjecturées pour a et b. Est-ce que cela confirme votre conjecture ?

B - TRAVAIL GEOMETRIQUE

1. Dessinez sur le cercle trigonométrique tan 45° et tan 67,5°.
2. Utilisez un triangle isocèle pour obtenir la valeur exacte de tan 67,5°.
3. En déduire, par angles complémentaires, la valeur exacte de tan 22,5°.
4. Formulez une conjecture sur les valeurs exactes de a, b, $f(a)$ et $f(b)$.

C - TRAVAIL ALGEBRIQUE

1. On donne la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$
On pose $t = \tan x$; utilisez la formule pour exprimer $\tan(2x)$, puis $\tan(3x)$ en fonction de t .
2. En déduire que $f(x) = \dfrac{t^2 - 3t^4}{3 - t^2}$.
3. On rappelle que $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$.
Exprimez en fonction de t la dérivée des fonctions $x \mapsto t^2$ et $x \mapsto t^4$
Calculez la dérivée $f'(x)$, et montrer que $f'(x)$ est du signe de $P(t) = t^5 - 6t^3 + t$.
4. Calculez les cinq racines de $P(t)$.

D - TRAVAIL DE SYNTHESE

1. Montrez que si f admet un extremum en $x = a$ et en $x = b$, alors $\tan a$ et $\tan b$ sont des racines de $P(t)$.
2. Quelles racines de $P(t)$ peuvent être égales aux valeurs exactes de $\tan a$ et de $\tan b$ trouvées aux questions B-2 et B-3 ?
Vérifiez par le calcul ces égalités.
En déduire que toutes les racines de $P(t)$ peuvent s'écrire sous la forme $u + v\sqrt{2}$, où u et v sont des entiers relatifs.
3. Factorisez $P(t)$, puis établir le tableau des signes de $P(t)$ selon la valeur de t dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire le tableau de variation de f pour $0 < x < \pi/2$ et $x \neq \pi/3$. Conclure.

BONUS

Montrez que si x et x' sont symétriques par rapport à $\pi/4$, alors $f(x') = \dfrac{1}{f(x)}$.

En déduire que si f admet un minimum égal à m pour $x = a$, alors f admet, pour $x = \pi/2 - a$, un maximum égal à $1/m$.

Vérifiez cette propriété sur les résultats obtenus aux questions précédentes.

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Fonction tangente — *Ampleur : 2*
Etude de fonction — *Calculatrice ou Traceur de courbe + Tableur*

Le travail proposé ici est l'étude d'une fonction qui "résiste" à une approche routinière, et demande d'aller y voir de plus près : il faudra un travail pratique, puis un travail géométrique, et enfin un travail algébrique pour en venir à bout !
Etant donné la diversité de ces approches, le professeur aura sans doute besoin de faire plusieurs fois le point avec ses élèves ; il aura intérêt à répartir le travail entre travail à la maison et travail en classe.

A - TRAVAIL PRATIQUE

La question de faire apparaître la courbe dans l'écran de la calculatrice ou de l'ordinateur est déjà problématique : il faut aller la "chercher". Sur calculatrice, une fois qu'on s'aperçoit qu'on ne voit rien, on pourra calculer quelques valeurs de $f(x)$ pour de faire une idée des valeurs de y. Avec un traceur de courbes comme Geogebra, on pourra zoomer en arrière avec la molette de la souris jusqu'à apercevoir la courbe, et modifier la fenêtre en conséquence. Pour y voir quelque chose, il faudra de toutes façons faire des tracés différents pour chacun des intervalles $I =]0\,;{}^{\pi}/_{3}[$ et $J =]{}^{\pi}/_{3}\,;{}^{\pi}/_{2}[$, comme l'énoncé invite à le faire.

La recherche numérique d'un minimum ou d'un maximum, qui est demandée aux deux premières questions, nous semble faire partie des compétences à développer chez les élèves. Le résultat de cette recherche est une première conjecture : elle n'a pas besoin d'être plus précise que l'affichage par défaut le permet, car elle va être confirmée et affinée dans les deux question suivantes. D'ailleurs, les valeurs observées pour les abscisses du minimum et du maximum sont en radians : on n'a donc aucune chance de reconnaître les valeurs remarquables … qui sont en degrés !

B - TRAVAIL GEOMETRIQUE

Une fois conjecturées les valeurs exactes de x en degrés, on va établir les valeurs exactes correspondantes pour $f(x)$. Pour cela on revient au cercle trigonométrique, à la définition de la fonction tan, et on utilise des propriétés élémentaires de géométrie vues au Collège. Cette partie est en soi un exercice intéressant de trigonométrie élémentaire : on s'aperçoit qu'il est facile d'obtenir les valeurs exactes de tan 22,5° et tan 67,5°, alors que le sinus ou le cosinus de ces angles demande beaucoup plus de travail …

Arrivés à ce point, nous sommes en possession d'une conjecture solide, avec des valeurs exactes. Le suite du travail va consister à la démontrer.

C - TRAVAIL ALGEBRIQUE

Pour être capable de traiter le problème, il faut prendre comme variable $t = \tan x$. La fonction f s'exprime alors comme une fraction rationnelle en t : pour aider les élèves qui pourraient s'emmêler dans le calcul de $\tan(2x)$ et de $\tan(3x)$, l'énoncé donne le résultat. De même, le calcul de la dérivée $f'(x)$ est très guidé, car l'essentiel ici est d'être capable de trouver les valeurs de x qui annulent la dérivée $f'(x)$.

Le polynôme $P(t)$ dont il faut trouver les racines est du cinquième degré ; une fois t mis en facteur, on est en présence d'une équation bicarrée : les quatre racines obtenues ont une expression compliquée, avec des "racines carrées de racines carrées", mais l'élève a le plaisir de trouver toutes les cinq racines, ce qui n'est pas un mince exploit à son niveau !

D - TRAVAIL DE SYNTHESE

Il est temps de recoller les morceaux : quel rapport ont les racines trouvées pour $P(t)$ et les valeurs conjecturées ? C'est l'objet des deux premières questions, qui permettent d'obtenir des expressions plus simples pour les valeurs des racines. On peut alors factoriser $P(t)$, puis s'attaquer au signe de $P(t)$ et aux variations de la fonction $x \mapsto f(x)$.

Le tableau de signes est simple, même s'il a autant de lignes que de facteurs dans $P(t)$. Les variations obtenues par la théorie corroborent les conjectures faites : le travail mathématique est alors "bouclé". C'est une source de satisfaction intellectuelle, que le professeur aura a coeur de faire partager à ses élèves …

BONUS

Ce petit travail a pour but, pour ceux qui auraient le temps et l'envie de le faire, d'apporter un éclairage supplémentaire sur la situation qu'on a étudiée : la fonction f a une propriété de symétrie par rapport à ${}^{\pi}/_{4}$, analogue à la propriété de la fonction exponentielle par rapport à 0 : les valeurs de la fonction en deux points symétriques sont inverses l'une de l'autre. Du coup, tout ce qui se passe pour $x \leq {}^{\pi}/_{4}$ est inverse de ce qui se passe pour $x \geq {}^{\pi}/_{4}$: un minimum devient un maximum, avec des valeurs inverses pour des valeurs symétriques de x. C'est bien ce qu'on a observé pour 22,5° et 67,5°.

LA TASSE DE CAFE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Le café, c'est bon quand ça sort de la cafetière, à 80°C. Après, ça refroidit vite : ça va encore vers 60° C, mais à partir de 40°C, c'est tiède et ce n'est plus bon du tout ! L'objectif de ce travail est de modéliser la température du café (en °C) par une fonction θ du temps t (en minutes), à partir de données expérimentales, et d'une loi physique.

Les données :

- au temps $t = 0$ mn, la température θ du café vaut $\theta(0) = 80$°C
- au temps $t = 16$ mn, la température θ du café vaut $\theta(16) = 40$°C
- la température ambiante α reste constante et égale à 20°C

La loi physique utilisée pour modéliser :

Le refroidissement du café est proportionnel à la différence entre la température initiale du café et la température ambiante.

Avec nos notations, cette loi s'écrit : $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = -k(\theta - \alpha)$, où θ et α sont en °C, t en mn, et k est une constante.

Si les températures aux instants t_1 et t_2 sont θ_1 et θ_2, on aura donc : $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = -k(\theta_1 - \alpha)$

Le problème est à présent de construire une fonction $t \mapsto \theta(t)$ qui donne la température du café à un instant t.

PREMIERE APPROCHE : UN MODELE DISCRET

- **A . Un exemple d'interpolation.** Notons x la température du café pour $t = 8$.
  1. Appliquer la loi physique entre $t = 0$ et $t = 8$, pour obtenir une relation entre x et k.
  2. Appliquer la loi physique entre $t = 8$ et $t = 16$, pour obtenir une autre relation entre x et k.
  3. Par élimination de k entre les deux relations, en déduire la valeur de x, à 0,1°C près.
- **B . Une règle générale d'interpolation**. On pose $y = \theta - \alpha$
  1. Montrer que la loi physique s'écrit : $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = -ky$, et qu'entre deux instants t_1 et t_2, on aura la relation : $\dfrac{y(t_2)}{y(t_1)} = 1 - k(t_2 - t_1)$
  2. Soit t_1, t_2 et t_3 trois dates régulièrement espacées. Comparer $\dfrac{y(t_2)}{y(t_1)}$ et $\dfrac{y(t_3)}{y(t_2)}$.
  3. En déduire la règle d'interpolation : $y(t_2) = \sqrt{y(t_1) \times y(t_3)}$
- **C . Interpolations et extrapolations :**
  1. Utiliser la règle d'interpolation pour remplir le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées de $\theta(t)$ à 0,1°C près.

t mn	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y °C																	
θ °C	80																40

  2. Utiliser à nouveau la règle pour remplir le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées de $\theta(t)$ à 0,1°C près.

t mn	0	16	32	48	64	80	96	112	128	256	512
y °C											
θ °C	80	40									

  3. Pourquoi la suite des valeurs $y(n)$, où n est le nombre de minutes écoulées, est-elle géométrique ?

DEUXIEME APPROCHE : UN MODELE CONTINU

La loi physique utilisée pour modéliser conduit à l'équation différentielle $y' = -ky$. Dans le cours de mathématiques, on verra que cette équation différentielle admet pour solutions les fonctions de la forme $y = C \times exp(-kt)$, où t est la variable, et C une constante.

1. A partir des données expérimentales, calculer C, puis montrer que k doit vérifier la relation $exp(-16k) = \dfrac{1}{3}$
2. Résoudre numériquement l'intersection des courbes $y = exp(-16x)$ et $y = \dfrac{1}{3}$ pour obtenir une valeur approchée de k à 10^{-6} près.
3. A partir de cette valeur approchée, remplir le tableau ci dessous des valeurs approchées à 0,1°C près de la fonction $\theta(t) = 20 + C \times exp(-kt)$, pour les valeurs de C et de k obtenues ci-dessus.

t mn	0	10	15	20	25	30	40	50	60	120	240
θ °C	80										

SYNTHESE ET CONCLUSION : Comparez les résultats obtenus par les deux approches.

LA TASSE DE CAFE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Suite géométrique	*Calculatrice ou tableur*
Décroissance exponentielle	*Ampleur : 2*

Le travail proposé ici est une démarche de modélisation d'un phénomène de la vie quotidienne :
le refroidissement d'une tasse de café.

Avant d'aborder les aspects mathématiques, il est bon de savoir que le café sort de la cafetière à une température très élevée, aux alentours de 85°, qui brûlerait nos lèvres si on n'utilisait pas un isolant thermique : la tasse en porcelaine protège nos lèvres du liquide brûlant, et permet de l'ingurgiter sans douleur ni blessure, car l'intérieur de notre bouche supporte ces températures.

Cet énoncé est conçu comme une introduction à l'utilisation de la fonction exponentielle pour décrire un phénomène physique. Il suppose qu'on ne connaît pas encore la résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, ni la fonction logarithme népérien. Et aussi que les élèves n'ont pas encore étudié la décharge d'un condensateur en Physique. Mais ce n'est pas rédhibitoire : revenir par une nouvelle approche sur une notion déjà étudiée permet de consolider les acquis.

SUR LA LOI PHYSIQUE

La loi physique utilisée ici est celle avec laquelle les physiciens décrivent le refroidissement d'un corps. C'est une loi "phénoménologique", c'est à dire qu'elle décrit de façon précise ce qui se passe, mais qu'on ne peut pas la déduire d'un principe premier.

Il est tout à fait possible de faire l'expérience en classe : il faut une cafetière, une tasse, un chronomètre et un thermomètre (à emprunter aux collègues de physique). On disposera de données expérimentales qu'on pourra comparer au modèle théorique. Mais il faut faire attention au fait que la température du liquide dans la tasse n'est pas uniforme : elle n'est pas la même au milieu du liquide et près des bords de la tasse ; d'autre par l'échange de chaleur avec le milieu ambiant provoque des courants de convection à l'intérieur de la tasse. On est donc bien dans une démarche de modélisation qui consiste à simplifier le réel pour pouvoir expliquer et prévoir.

SUR LE MODELE DISCRET

L'intérêt pédagogique de cette approche est d'établir et d'utiliser une règle d'*interpolation*, c'est à dire qui permet de calculer une valeur inconnue située *entre* deux valeurs connues. La règle obtenue ici est que la température "au milieu" de deux dates t_1 et t_2 est la moyenne géométrique des températures θ_1 et θ_2. A partir des valeurs extrêmes $t = 0$ et $t = 16$, on obtiendra alors par dichotomie toutes les valeurs intermédiaires. On utilisera ensuite cette règle pour *extrapoler*, c'est à dire calculer une valeur inconnue à l'*extérieur* de deux valeurs connues.

Si on s'intéresse à la suite des valeurs $y(n)$, la règle d'interpolation s'écrit $y(n) = \sqrt{y(n-1) \times y(n+1)}$,
et caractérise une suite géométrique : en effet, à partir de cette règle, on peut démontrer par récurrence que $y(n) = y(0) \times q^n$.
On peut aussi s'apercevoir que si $t_2 = t_1 + 1$, la relation $\dfrac{y(t_2)}{y(t_1)} = 1 - k(t_2 - t_1)$ s'écrit $\dfrac{y(n+1)}{y(n)} = 1 - k$,
ce qui prouve que la suite des valeurs y(n) est géométrique de raison $1 - k$.

L'énoncé n'insiste pas a priori sur le caractère géométrique de la suite des valeurs de $y(n)$, car l'objectif est d'abord d'utiliser la règle d'interpolation pour remplir le tableau. Par contre, une fois rempli le tableau, se poser la question de la nature de la suite devient pertinent, en particulier pour faire le lien avec la nature exponentielle du modèle continu.

SUR LE MODELE CONTINU

Il s'agit ici du modèle classique, où on détermine les valeurs de C et de k en examinant les valeurs de la température pour $t = 0$ et pour $t = 16$, pour calculer ensuite les valeurs de la température pour n'importe quelle valeur de t. Le calcul de la valeur de k suppose qu'on ne connaît pas encore le logarithme népérien : il faut résoudre numériquement l'intersection de deux courbes.

Les résultats obtenus par l'approche discrète et par l'approche continue sont très voisins. L'approche continue est plus rapide pour calculer des valeurs intermédiaires, ou pour prévoir des valeurs postérieures à $t = 16$, mais le "prix à payer" pour cette efficacité est l'utilisation d'une fonction sophistiquée dont les valeurs ne sont accessibles qu'avec la calculatrice ou le tableur : la fonction exponentielle. En outre cela suppose que le temps puisse être considéré comme une variable continue, somme d'instants infinitésimaux de durée nulle, ce qui n'est pas toujours facile à concevoir.
Nous pensons que ce travail est un bon exemple pour faire réfléchir les élèves sur le passage du discret au continu.

TANGENTES A LA COURBE EXPONENTIELLE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

L'objectif de ce travail est de découvrir expérimentalement une propriété des tangentes à la courbe exponentielle, puis de chercher à démontrer cette propriété par le calcul.

LA QUESTION POSÉE :
Quelle propriété possède le point où la tangente à la courbe *y = exp(x)* coupe l'axe des abscisses ?

A - DEMARCHE EXPERIMENTALE

Pour répondre expérimentalement à cette question, vous allez utiliser le logiciel *Geogebra.*

1. **Réalisation de la figure**

   a. Faites apparaître la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = exp(x)$.
   b. Créez un point A sur cette courbe.
   c. Créez la tangente en A à la courbe.
   d. Créez le point d'intersection B de la tangente avec l'axe des abscisses.

2. **Expérimentation**

   Faites varier le point A sur la courbe.
   Observez simultanément les abscisses de A et de B.

3. **Conjecture**

   Quelle propriété remarquable reste vraie pour toutes les positions du point A ?
   Imaginez et mettez en oeuvre une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.

B - RECHERCHE D'UNE DEMONSTRATION

1. Soit a un réel, et A le point d'abscisse a de la courbe $y = exp(x)$.
   Etablir l'équation de la tangente T en A à la courbe.
2. pouvez-vous utiliser cette équation pour prouver votre conjecture ?
3. Conclure en énonçant la propriété que vous avez démontré.

C - VERS UNE GENERALISATION

Vous allez chercher une propriété analogue pour la courbe représentative de la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = exp(mx)$.

1. **Un premier exemple**
   a. Choisissez une valeur m. Construisez la figure et observez : quelle conjecture pouvez-vous faire ?
   b. Imaginez et mettez en oeuvre une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.
2. **Un second exemple**
   a. Prenez une autre valeur de m et construisez la figure : quelle conjecture pouvez-vous faire ?
   b. Imaginez et mettez en oeuvre une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.
3. **Démonstration.**
   a. Écrivez la propriété conjecturée pour un réel m quelconque.
   b. Donnez l'équation de la tangente T en A à la courbe représentative de la fonction f_m.
   c. Utilisez cette équation pour prouver votre conjecture.

La page du prof

Les courbes exponentielles	*Ampleur : 1*
Tangente à une courbe	*Geogebra*

Le travail proposé ici a pour but de se familiariser avec les courbes exponentielles,
à travers une propriété simple des tangentes.

A - DEMARCHE EXPERIMENTALE

La construction de la tangente sous Geogebra s'accompagne automatiquement de l'affichage de son équation dans la fenêtre "Algèbre". C'est le moment de faire observer aux élèves que son coefficient directeur est égal à l'abscisse du point A, et de leur en demander la raison : l'exponentielle est sa propre dérivée !

L'observation du fait que l'abscisse du point B vaut une unité de moins que l'abscisse du point A est facile pour des abscisses positives. Il n'est pas inutile de demander aux élèves de le vérifier pour des abscisses de A entre 0 et 1, puis pour des abscisses négatives de A.

La recherche d'une méthode de vérification logicielle du résultat observé est intéressante car il y a de nombreuses possibilités ; entre autres :

- On peut construire par parallèle et intersection le point C de l'axe (Ox) qui a la même abscisse que A, puis la distance CB.
- On peut créer le point C (x(A) ; 0) de l'axe des abscisses, puis le segment [BC], dont la longueur s'affiche automatiquement.
- On peut créer et faire afficher la différence d = x(B) - x(A)

Dans tous les cas, on observe que la distance reste constante et égale à 1.

B - RECHERCHE D'UNE DEMONSTRATION

Il s'agit ici de l'application directe du cours, pour démontrer un résultat observé et vérifié expérimentalement.
Cela peut être fait juste après l'expérimentation, ou donné comme exercice à chercher à la maison.

C - VERS UNE GENERALISATION

Le travail sur différentes valeurs de m peut s'organiser de façon collaborative au sein de la classe, en donnant à chaque élève une ou deux valeurs particulières de m à étudier. La collecte des résultats de chacun permet de proposer une généralisation, dont on peut vérifier la validité sur l'ensemble des résultats obtenus.

La démonstration dans le cas général comporte deux variables a et m, ce qui peut être une source de difficulté. Avant d'aborder la démonstration dans le cas général avec une valeur littérale de m, il est bon que chaque élève fasse la démonstration sur la ou les valeurs qu'il a étudié. La généralisation sera ensuite plus facile.

UNE EQUATION TRANSCENDANTE

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = x^4$

La page du prof

Croissance comparée — *Ampleur : 1*

Logarithme — *Geogebra*

Cette activité, expérimentée avec un franc succès auprès des élèves, s'articule autour de trois points :

– D'abord, l'équation proposée n'admet aucune résolution théorique possible. Il faut donc l'aborder d'une autre façon : on va tracer deux courbes, et chercher les abscisses de leurs points d'intersection.

  Quand on parle d'impossibilité d'une résolution théorique, on veut dire qu'il n'y a pas de formule explicite des racines utilisant les fonctions usuelles, comme les élèves en ont l'habitude pour les équations du second degré par exemple.

  Par contre le théorème des valeurs intermédiaires peut nous démontrer l'existence des racines, et nous aider à les localiser, aussi près que nos moyens de calcul le permettront.

  Il peut être intéressant d'attirer l'attention des élèves, à la fin de l'activité, sur le fait que la fonction exponentielle n'est pas de la même famille que les fonctions puissances : ce n'est pas un polynôme, c'est une fonction transcendante.

– Ensuite, la question posée est choisie pour interpeller les élèves sur ce qui se passe quand x devient très grand pour la fonction exponentielle et pour une fonction puissance comme $x \mapsto x^4$.

  La réponse théorique, bien connue des élèves est que l'exponentielle "croît beaucoup plus vite" que les fonctions puissances, qu'elle est "prépondérante" sur celles-ci, qu'elle "l'emporte" sur elles ...

  Mais la conséquence de cette propriété sur les courbes est rarement mise en jeu : la courbe exponentielle finit par être au dessus de n'importe quelle courbe polynomiale.

  Or ici, elle reste en dessous tant qu'on reste dans des intervalles usuels. Une fois cette contradiction mise en évidence, les élèves développent naturellement des stratégies pour aller voir "plus loin". En général, une manipulation fiévreuse de la souris les amène à trouver le troisième point d'intersection, pour une ordonnée voisine de 5560. Les plus malins modifient l'échelle du repère et finissent aussi par voir le troisième point. Mais dans tous les cas, quand on voit le troisième point, on ne voit plus les deux autres.

– C'est le moment de poser la question : comment faire pour voir les trois racines sans changer de repère ? La réponse est de transformer l'équation proposée par la fonction logarithme, en utilisant au passage le fait que c'est une bijection.

  Une fois qu'on élimine la valeur $x = 0$ qui n'est pas solution, on a une équivalence logique entre $e^x = x^4$ et $\ln(x^4) = x$ car x^4 a le bon goût d'être toujours positif.

  Le tracé des deux nouvelles courbes révèle alors les trois racines : on retrouve les deux qu'on avait déjà trouvé, et on récupère la troisième. Les trois points et leurs abscisses sont tous visibles sur la figure.

  Si on veut se ramener à la courbe de référence $y = \ln x$, on peut avoir envie de transformer $\ln(x^4)$ en $4\ln x$, mais il faut alors séparer deux cas, selon le signe de x : pour $x > 0$, on arrive à l'équation $\ln x = x/4$, et pour $x < 0$, à l'équation $\ln(-x) = x/4$.

  Si de prime abord, on oublie de faire attention au signe de x, ce n'est pas grave, car on trouve deux solutions : une positive qu'on a déjà trouvée, et la troisième qu'on cherchait. On peut alors poser la question : "Où est passée la solution négative ?", ce qui renvoie à la discussion nécessaire sur le signe de x.

  Un aspect intéressant du logarithme est qu'il comprime les grands nombres. C'est d'ailleurs ce qui fait l'utilité des échelles logarithmiques pour représenter dans le même repère des nombres d'ordre de grandeurs très différents.

  D'ailleurs transformer l'équation en passant au logarithme des deux membres, correspond simplement à l'utilisation d'une échelle semi-logarithmique ...

LA SPIRALE DU TRAVAIL PRATIQUE

Question théorique 3

Comment voir la 3è racine
sans changer de repère ?
En passant au logarithme.

Mise en oeuvre 3

On trace les courbes
$y = ln(x^4)$ et $y = x$

Question théorique 2

L'exponentielle
va plus vite à l'infini
qu'une fonction puissance

Mise en oeuvre 2

On "zoome"
en arrière pour
voir plus loin

Question théorique 1

Pas de résolution
théorique possible.

Mise en oeuvre 1

On trace
les deux courbes
$y = e^x$ et $y = x^4$

La question posée

Résoudre dans $\mathbb{R}$
l'équation $e^x = x^4$

Conjecture 1

L'équation admet
deux racines

Observations 1

Il y a deux points
d'intersection visibles :
A(-0,82 ;0,44) et B(1,43 ;4,18)

Conjecture 2

Il y a une troisième racine
encore plus loin

Observations 2

L'exponentielle reste
en dessous de
la puissance

Observations 4

On trouve trois points
d'intersection.
On retrouve les deux
racines -0,82 et 0,43,
plus une nouvelle 8,61

Conjecture validée expérimentalement

L'équation proposée admet trois racines,
deux positives et une négative

SOMMATION PAR PAQUETS

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

Maths entre Papier et Ecran

On appelle **série harmonique** la somme des inverses des entiers naturels : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Pour l'étudier, on définit la somme S_n des inverses des entiers de 1 à n,
et on va s'intéresser à ce qui se passe pour S_n quand n tend vers l'infini.

Autrement dit, on a : $S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$.

PREMIÈRE PARTIE : LA SÉRIE HARMONIQUE

TRAVAIL PRATIQUE

1. **La suite des inverses**
   - **a.** Dans une feuille de tableur, créez deux colonnes :
     dans l'une, intitulée n, vous placerez les entiers à partir de 1, et dans l'autre, intitulée 1/n, vous placerez leurs inverses.
   - **b.** Prolongez ces colonnes jusqu'à $n=100$ par recopiage vers le bas. Que pouvez-vous dire de la limite des termes 1/n ?
   - **c.** Est-ce que cela nous donne une indication sur le comportement de S_n quand n tend vers l'infini ?
2. **La série harmonique**
   - **a.** Créez une troisième colonne intitulée Sn contenant la somme des inverses des entiers de 1 à n.
     Quelle conjecture pouvez-vous faire sur le comportement de S_n quand n tend vers l'infini ?
   - **b.** Créez un graphique représentant $n \mapsto S_n$
     A quelle courbe de référence ressemble ce graphique ?
   - **c.** On note f la fonction de référence correspondante. Créez une nouvelle colonne contenant les différences $Sn-f(n)$.
     Que constatez-vous ? Est-ce que cela va dans le sens de votre conjecture précédente ?

TRAVAIL THEORIQUE

Pour étudier le comportement de la somme S_n, on va découper cette somme en "paquets", à partir de 1/2.
Pour $n \geq 1$, on définit des "paquets" de termes consécutifs P_n :

$$P_1=\frac{1}{2}\ ;\ P_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ ;\ P_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\ ;\ P_4=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ ;\ P_5=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\quad \ldots \text{ et ainsi de suite } \ldots$$

1. **Etude du paquet P_n**
   - **a.** Quel est le premier terme du paquet P_n ? Le dernier terme ? Combien de termes comporte le paquet P_n ?
   - **b.** Démontrez que $\forall n \geqslant 1$ on a : $P_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. **Série harmonique et somme de paquets**.
   - **a.** Ecrire S_{2^n} à l'aide des paquets $P_{2^0}, P_{2^1} \ldots P_{2^{n-1}}$
   - **b.** En déduire une minoration de S_{2^n}.
   - **c.** Que peut-on en conclure pour les sommes S_{2^n}, quand n tend vers l'infini ?
3. **Limite de la série harmonique**.
   - **a.** Soit A un réel positif quelconque. On définit l'entier k par $E(2A)=k-1$, où E désigne la fonction *partie entière.*
     Montrer que $k/_2 \geq A$, puis que $S_{2^k} > A$.
   - **b.** En déduire que si $n \geq 2^k$ alors $S_n > A$. Conclure.

DEUXIÈME PARTIE : ÉTUDE DES PAQUETS

TRAVAIL PRATIQUE

Revenez à la feuille de classeur de la première partie.

1. A quel paquet est égal la différence $S_{2n}-S_n$?
   Pour calculer les valeurs des 100 premiers paquets, jusqu'à quel entier n faudra-t-il calculer les sommes S_n ?
   Faites afficher les sommes S_n jusqu'à cet entier n.
2. Créez deux colonnes, pour placer les sommes S_{2n} et les paquets P_n .
   Pour calculer les paquets P_n, vous avez besoin "d'aller chercher" la valeur de S_{2n} correspondante.
   Pour cela, vous allez utiliser la fonction "RECHERCHE" du tableur : la formule RECHERCHE(a ; plage 1 ; plage 2)
   cherche la valeur a dans la plage 1 , et renvoie la valeur située sur la même ligne que a dans la plage 2.
   Etablir la formule qui va afficher S_{2n} dans la colonne prévue, à la même ligne que S_n, puis calculez les 100 premiers paquets.
3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur le comportement de P_n quand n tend vers l'infini ?

TRAVAIL THEORIQUE

1. Etudiez la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)-x$. En déduire que pour $x>-1$ on a $\ln(x+1) \leqslant x$.
2. En appliquant cette inégalité pour $x=1/n$ et à $x=-1/n$, établir que pour tout entier $n>2$, on a :
$$\ln(n+1)-\ln(n) < \frac{1}{n} < \ln(n)-\ln(n-1)$$
3. Quel encadrement du paquet P_n peut-on déduire de la question précédente ?
   Que pouvez-vous en conclure pour P_n quand n tend vers l'infini ?

J. Lubczanski, I. Lallier-Girot

La page du prof

Suites numériques — *Ampleur : 2*
Fonction logarithme népérien, mais pas de calcul intégral — *Tableur*

Cet énoncé propose une étude élémentaire de la série harmonique :
en utilisant des paquets consécutifs de n termes, on démontre sa divergence,
puis on démontre la convergence de ces paquets vers une valeur inattendue.
Le parti pris de ce travail est de rester au niveau des suites, sans faire appel au calcul intégral.

PREMIÈRE PARTIE : LA SÉRIE HARMONIQUE

1. **La suite des inverses**
   Le travail demandé ici est très simple : il s'agit de se rendre compte que chacun des termes qu'on va ajouter tend vers 0.
   La dernière question n'appelle pas de réponse du professeur à ce moment du travail, juste l'envie d'aller plus loin …
2. **La série harmonique**
   Le travail d'observation et de conjecture se décline en trois temps :
   a. L'observation des 100 premiers termes : elle peut donner lieu à diverses conjectures : croissance ? convergence ?.
   b. Le graphique $n \mapsto S_n$: il devrait faire penser à la fonction logarithme népérien.
   c. L'observation des valeurs de $S_n - \ln(n)$: la conjecture d'une convergence semble naturelle, mais vers quelle limite ?

   Nous savons que les différences $S_n - \ln(n)$ ont une limite quand n tend vers $= \infty$, et que cette limite s'appelle la constante d'Euler, voisine de 0,577. Mais ce résultat ne sera pas démontré au cours de ce travail.
   L'idée est de faire le raisonnement suivant : si je conjecture que $S_n - \ln(n)$ tend vers une limite finie ℓ, alors, comme $\ln(n)$ tend vers l'infini , cela oblige S_n à en faire autant : ma conjecture a pour conséquence la divergence de la série harmonique.

TRAVAIL THEORIQUE

La démonstration proposée ici est classique : on regroupe les termes de la série harmonique en paquets qui seront chacun plus grands que $1/2$. Cette démonstration est très convaincante à l'oral, mais elle demande un peu de rigueur dès qu'on veut la rédiger !

1. **Etude du paquet** P_n
   On se familiarise avec les paquets, et on établit tranquillement la minoration de chaque paquet par $1/2$.
2. **Série harmonique et somme de paquets**.
   On décompose S_{2^n} en somme de n paquets, d'où la minoration deS_{2^n} par $n/2$, et la divergence de cette suite.
3. **Limite de la série harmonique**.
   La suite des S_{2^n} est une sous suite de la suite des S_n, et elle est divergente vers $+\infty$: pour en déduire que la suite des S_n est elle aussi divergente vers $+\infty$, on a besoin de sa monotonie. Pour rédiger cela convenablement les élèves devront repasser par la définition de la limite infinie d'une suite : cette question est une petite restitution organisée de connaissances ...

DEUXIÈME PARTIE : ÉTUDE DES PAQUETS

On pourrait établir théoriquement la convergence de la suite (P_n) par le théorème de convergence monotone.
En effet, il est facile d'établir que cette suite est croissante et majorée : d'une part, $P_n = S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0$
D'autre part, P_n est la somme de n termes tous strictement inférieurs à $1/n$, donc $P_n \leq 1$.
Mais cela ne donne pas la limite de cette suite. Nous avons préféré commencer par une approche pratique, qui donne une idée de la valeur de la limite, avant d'en découvrir la valeur exacte dans une partie théorique.

TRAVAIL PRATIQUE

Le centième paquet est $P_{100} = S_{200} - S_{100}$: pour calculer les 100 premiers paquets il faut donc calculer S_n jusqu'à $n = 200$.
La fonction RECHERCHE sert à afficher la valeur de S_{2n} sur la même ligne que S_n, pour calculer facilement le paquet P_n.
On observe que les termes P_n croissent et se rapprochent d'un nombre $\simeq 0,693$, assez mystérieux a priori pour un élève.

TRAVAIL THEORIQUE

Le travail consiste à additionner n encadrements membre à membre,
et à s'apercevoir que tous les termes se simplifient sauf les extrêmes (méthode dite "des cascades").

On obtient finalement : $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) < P_n < \ln(2)$, d'où on peut conclure par le théorème des gendarmes que P_n tend vers $\ln 2$.

l'APMEP c'est ...

Des structures efficaces
sur la base du bénévolat intégral : un **Comité** et un **Bureau National**, **des Commissions Nationales** par niveau et par thèmes

26 Régionales
organes de liaison avec les autorités pédagogiques et administratives de la Région (IREM, IUFM, IPR, ...) relais essentiels entre le National et les adhérents, avec parfois leurs propres bulletins

Les Journées Nationales
temps fort de l'Association, sur 3 ou 4 jours, déplaçant près de 1000 enseignants de mathématiques. Organisées, chaque année, en des lieux et sur des thèmes différents, avec des conférenciers, des ateliers, des débats, ...

Un secrétariat permanent
26 rue Duméril - 75013 PARIS
Courriel : apmep@apmep.asso.fr

Le BGV
Bulletin à **G**rande **V**itesse pour cerner rapidement l'actualité mathématique et associative

Un Site
http://www.apmep.asso.fr

Mathématiques au Collège
Base d'exercices sur disquettes, en collaboration avec le CNDP

EVAPM
Evaluation par l'APMEP de l'impact des programmes

ClasMath
Classeur de documents informatisés pour le Lycée

PLAQUETTE D'INFORMATION (48 P.)
sur les positions de l'APMEP, les brochures, ... , disponible - franco de port - sur simple demande.

Des BROCHURES APMEP et des Cédéroms
par niveau d'enseignement et par secteur
Avec réduction de 30% aux adhérents.
Co-éditions et co-diffusions à prix réduits d'autres ouvrages

Des Groupes de Travail
selon les besoins, et sur projets, comme : jeux
Prospective-Bac
Problématiques Lycée
Réflexion sur les programmes de Collège ...

Le BULLETIN VERT
6 numéros
avec :
-des **articles de fond**
-d'autres **"dans nos classes"**
- des **problèmes**
-une **riche documentation**
- un **dossier** par numéro

PLOT
Revue tournée préférentiellement vers les "débutants". 4 numéros par an (160 pages environ)

PUBLIMATH
Banque bibliographique de données sur INTERNET en coopération avec les IREM