Année 2009

Exercices de mathématiques

Exercice 1. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

Exercice 2. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante :

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.
$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6.
$$f(x,y) = \begin{cases} x e^{\arctan \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 5. 1.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+2y)^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{y} & \text{si } y\neq 0\\ x & \text{sinon.}\end{cases}$$

5.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ \frac{1}{1+x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

définie sur $D=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0\}$.

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y}{x-y}, \quad \text{si } x\neq y\\ &= x, \quad \text{si } x=y. \end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.
2. Pour tout $v=(\cos\theta,\sin\theta)$, calculer $D_vf(1,-2)$. Pour quelles valeurs de $\theta\in[0,2\pi[$, $D_vf(1,-2)=0$?

3. Étudier la continuité de f au point $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.
4. Étudier la continuité de f au point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
5. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et les déterminer.
6. Montrer que la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ existe pour $v = (1,1)$, et la déterminer. On constatera que l'égalité $D_v f(0,0) = \partial_x f(0,0) + \partial_y f(0,0)$ n'est pas satisfaite. Expliquer pourquoi cela ne contredit aucun théorème du cours.