Parcours*du groupe B

Table des matières

Avertissement aux enseignants

Ce document est une version papier-crayon des parcours différenciés d'apprentissage. En attendant le développement informatique des parcours et de la totalité des exercices qui les composent, nous vous proposons ici des exercices, accompagnés d'aides pour les élèves. Certains exercices sont accompagnés d'aides pour l'enseignant.

Vous pouvez nous adresser vos questions et vos commentaires à l'adresse suivante :

pepimep@gmail.com

Le groupe B est composé des deux sous-groupes B− et B+. Le groupe B est composé des sous-groupes B− et B+. Un parcours global est affecté au groupe. Celui-ci se présente sous la forme d'une liste de capacités à travailler via des exercices sélectionnés parmi :

- les exercices de la liste ci-jointe,
- les exercices interactifs MeP,
- les manuels Sésamath
  - $5^{\text{ème}}$ Chapitre N4 : Calcul littéral (édition 2010),
  - $4^{\text{ème}}$ Chapitre N4 : Calcul littéral (édition 2007),
  - $3^{\text{ème}}$ Chapitre N2 : Calcul littéral et équations (édition 2008).

Pour chaque capacité à travailler, vous pouvez sélectionner un ou plusieurs exercices pour vos élèves, en cochant les carrés blancs.

En fonction du temps dont vous disposez, vous pourrez également intercaler des temps de synthèse destinés à dégager les principales notions soit en cours, soit à la fin des parcours.

Retour à la table des matières

*Réalisé dans le cadre du projet PepiMeP en collaboration avec les laboratoires LDAR (Université Paris-Diderot) et LIP6 (Université Pierre et Marie Curie), l'association Sésamath et avec le soutien financier de l'Ile-de-France.

1 Présentation du groupe

1.1 Caractéristiques

- Du groupe
  - Les élèves réussissent des calculs simples et utilisent parfois des règles fausses.
- Des sous-groupes
  - B− : Pour résoudre des problèmes, les élèvent utilisent des démarches numériques ou des démarches algébriques inadaptées.
  - B+ : Pour résoudre au moins un type de problème, les élèves utilisent une démarche algébrique adaptée.

1.2 Leviers

- Du groupe
  - Lettres considérées comme des nombres généralisés.
  - Prise en compte de la structure d'expressions peu complexes.
- Du sous-groupe B+
  - Expressions algébriques associées à d'autres représentations (graphique, programme de calcul, figure géométrique ou langage naturel).
  - Utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes.

1.3 Fragilités

- Du groupe
  - Peu de contrôle des calculs.
  - Faible reconnaissance de la structure et de l'équivalence des expressions.
  - Utilisation de règles fausses dans le calcul algébrique.
- Du sous-groupe B−
  - Faible utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes.
  - Expressions algébriques peu associées à d'autres représentations (graphique, programme de calcul, figure géométrique ou langage naturel).

1.4 Objectifs du parcours

1. Déstabiliser les règles fausses à partir de contre-exemples.
2. Reconnaître la structure des expressions en les associant à d'autres représentations.
3. Travailler la technique (développer, factoriser), contrôler les calculs en appui sur l'équivalence des expressions (contre-exemple numérique dans le cas des transformations erronées) et l'intelligence des calculs (choix de stratégies).
4. Résoudre des problèmes par l'algèbre.

Retour à la table des matières

2 Parcours

Capacité	Liste	MeP	Manuels
Tester et prouver l'équivalence d'expressions (tester si une égalité est vraie pour toute valeur de la variable)	☐ Exercice 1 ☐ Exercice 2 ☐ Exercice 3		☐ $3^{\text{ème}}$Ex 1p.40
Calculer une expression algébrique en donnant des valeurs numériques aux lettres	☐ Exercice 4		☐ $4^{\text{ème}}$Ex 24p.71 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 53p.45
Associer une expression à d'autres représentations	**Pour B- :** ☐ Exercice 8 **Pour B+ :** ☐ Exercice 5 ☐ Exercice 6 ☐ Exercice 7 **Pour tous :** ☐ Exercice 9	**Pour B- :** ☐ 4N4s5ex1 ☐ 4N4s5ex2 **Pour B+ :** ☐ 4N4s5ex3 ☐ 4N4s5ex4 ☐ 4N4s5ex5 ☐ 4N4s5ex6 **Pour tous :** ☐ 4N4s5ex7 ☐ 4N4s5ex8 ☐ 4N4s5ex9	☐ $3^{\text{ème}}$Ex 22p.42 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 23p.42
Développer une expression algébrique	☐ Exercice 3 ☐ Exercice 10	☐ 4N4s4ex4 ☐ 4N4s4ex5 ☐ 4N4s4ex6 ☐ 4N4s4ex7 ☐ 3N2s3ex2 ☐ 3N2s3ex3 ☐ 3N2s3ex4 ☐ 3N2s3ex5 ☐ 3N2s3ex6 ☐ 3N2s3ex7 ☐ 3N2s3ex8 ☐ 3N2s3ex10 ☐ 3N2s6ex1	☐ $3^{\text{ème}}$Ex 5p.40 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 6p.40 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 7p.40 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 9p.40 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 32p.43 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 47p.45 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 52p.45 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 53p.45 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 59p.46 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 60p.46
Factoriser une expression algébrique	☐ Exercice 3 ☐ Exercice 10 ☐ Exercice 11 ☐ Exercice 12	☐ 3N2s3ex10 ☐ 3N2s4ex4 ☐ 3N2s4ex5 ☐ 3N2s4ex7 ☐ 3N2s4ex8 ☐ 3N2s6ex1	☐ $3^{\text{ème}}$Ex 15p.41 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 16p.41 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 17p.41 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 18p.41 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 19p.41 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 31p.43 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 32p.43 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 48p.45 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 52p.45 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 53p.45 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 59p.46 ☐ $3^{\text{ème}}$Ex 60p.46

Capacité	**Liste**	**MeP**	**Manuels**
Résoudre une équation			☐ 3ème Ex 31p.43 ☐ 3ème Ex 32p.43 ☐ 3ème Ex 52p.45 ☐ 3ème Ex 59p.46 ☐ 3ème Ex 60p.46
Utiliser le calcul algébrique pour prouver un résultat en arithmétique ou en géométrie			☐ 3ème Ex 25p.42 ☐ 3ème Ex 50p.45 ☐ 3ème Ex 58p.46
Mettre en équation un problème et le résoudre	☐ Exercice 13		☐ 3ème Ex 25p.42 ☐ 3ème Ex 35p.43 ☐ 3ème Ex 36p.43 ☐ 3ème Ex 37p.43 ☐ 3ème Ex 38p.43 ☐ 3ème Ex 39p.43 ☐ 3ème Ex 40p.43 ☐ 3ème Ex 41p.44 ☐ 3ème Ex 42p.44 ☐ 3ème Ex 43p.44 ☐ 3ème Ex 44p.44 ☐ 3ème Ex 51p.45

Retour à la table des matières

Chemins des exercices MeP dans LaboMeP

- Série 4N4s4 : 4e/Calcul littéral/Développer, réduire/

  4N4s4ex4 Distributivité double

  4N4s4ex5 Carrés

  4N4s4ex6 Synthèse (niveau 1)

  4N4s4ex7 Synthèse (niveau 2)
- Série 4N4s5 : 4e/Calcul littéral/Problèmes/

  4N4s5ex1 Exprimer en fonction d'un nombre

  4N4s5ex2 Programmes de calcul

  4N4s5ex3 Longueurs

  4N4s5ex4 Longueurs (bis)

  4N4s5ex5 Géométrie plane

  4N4s5ex6 Volumes

  4N4s5ex7 Traduire une phrase par une équation

  4N4s5ex8 Ages

  4N4s5ex9 Divers
- Série 3N2s3 : 3e/Calcul littéral, Equations/Développer/

  3N2s3ex2 Carré d'une somme

  3N2s3ex3 Carré d'une différence

  3N2s3ex4 Produit de la somme par la différence

  3N2s3ex5 Identités en vrac

  3N2s3ex6 Avec les fractions

  3N2s3ex7 Développements (sans changement de signe)

  3N2s3ex8 Développements (avec changement de signe)

  3N2s3ex9 En géométrie

  3N2s3ex10 Associer un développement à une expression factorisée
- Série 3N2s4 : 3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/

  3N2s4ex4 Obtention du carré d'une différence

  3N2s4ex5 Différence de deux carrés (niveau 1)

  3N2s4ex7 Facteur commun (niveau 1)

  3N2s4ex8 Facteur commun (niveau 2)
- Série 3N2s6 : 3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/

  3N2s6ex1 Développer, factoriser

Retour à la table des matières

3 Exercices

Exercice 1.
Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	**Vrai/Faux**	**Justification**
$a^2 = 2a$		
$2a^2 = (2a)^2$		
$3a^2 = 9a^2$		
$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$		
$2^2a^2 = (2a)^2$		
$a^7a^3 = a^{21}$		
$a^7a^3 = a^{10}$		

Exercice 2.
Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de t ? Justifie ta réponse.

Egalité	**Vrai/Faux**	**Justification**
$(t+3)^2 = t^2 + 9$		
$(t+3)^2 = t^2 + 6t + 9$		
$-3t^2 = 9t^2$		
$(-3t)^2 = 9t^2$		
$4t^2 - 9 = (2t-3)^2$		

⇛ Aide pour les exercices 1 et 2
Tu peux tester l'égalité en donnant des valeurs aux lettres et regrouper les résultats dans un tableau. Par exemple, pour la première égalité de l'exercice 1, tu peux remplir le tableau suivant :

a	a^2	$2a$
1		

Si une égalité est vraie, tu peux la justifier avec une propriété. Tu peux montrer qu'une égalité est fausse à partir d'un contre-exemple.

Retour tableau

Exercice 3.
Dans chaque cas, on considère deux expressions A et B. Pour commencer, calcule A et B pour les valeurs indiquées. Que remarques-tu ? Les expressions sont-elles équivalentes ? Justifie et explicite les propriétés utilisées.

1. $A = (x+3)(x-1)$ et $B = x^2 - x + 3x - 3$. Calcule pour $x = 0$; $x = -3$; $x = 1$.
2. $A = ab + 3a - 3b - 9$ et $B = (a-3)(3+b)$. Calcule pour $a = 0$ et $b = 0$; $a = 1$ et $b = -1$; $a = -1$ et $b = 1$.
3. $A = 3x^2 + 4x + 1$ et $B = (3x+1)(x+1)$. Calcule pour $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.
4. $A = 2a^2b + 3ab^2 + 2a + 3b$ et $B = (ab+1)(2a+3b)$. Calcule pour $a = 0$ et $b = 1$; $a = 1$ et $b = -1$; $a = -1$ et $b = 1$.

⇛ Aide pour l'exercice 3
Tu peux conjecturer l'équivalence à partir des calculs demandés.
Pour prouver l'équivalence des expressions, tu peux réécrire les expressions, soit en les développant, soit en les factorisant.

Une **expression qui peut être développée** est un produit de facteurs. Par exemple, $A = x(x+1)$ se réécrit $A = x \times (x+1)$. Elle est le produit de x et de $x+1$. Pour développer, on utilise la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab+ac$. On trouve $A = x^2+x$.

Une **expression qui peut être factorisée** est une somme de termes. Par exemple, $B = 8 + 2x$ est la somme de 8 et de $2x$. Pour factoriser, on utilise la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b + c) = ab + ac$. On trouve $B = 2(4 + x)$.

Retour tableau

Exercice 4.
On étudie l'expression $A(x) = 2x^2 + 7x + 3$.

1. Les expressions $B(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x + 3)$ et $C(x) = 2x(x + 3) + (x + 3)$ sont-elles équivalentes à l'expression $A(x)$? Justifie.
2. Choisis l'expression la plus adaptée pour calculer $A(x)$ lorsque x prend les valeurs $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -3$.

⇛ Aide pour l'exercice 4

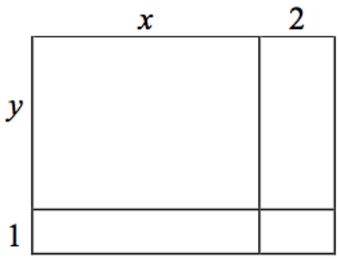
Aide pour la question 1. Voici plusieurs aides, choisis celle qui te convient le mieux.
- Trace les courbes représentatives de fonctions A, B et C. Que remarques-tu ?
- A l'aide de la calculatrice ou du tableur, calcule $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ pour des valeurs de x différentes de a et b. Que remarques-tu ?

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$

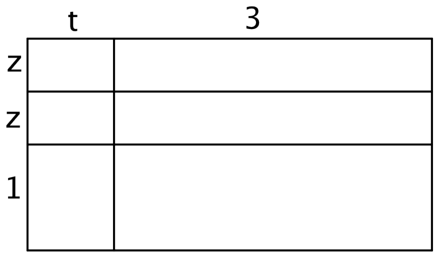
Aide pour la question 2. Trace les courbes représentatives des fonctions A, B et C. Interprète l'intersection de chacune des courbes avec l'axe des abscisses et exploite-le pour faire les calculs.

Retour tableau

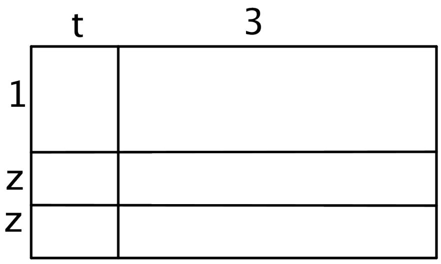
Exercice 5.
Hachure la partie de la figure ayant pour aire l'expression $E = x(y+1) + 2y$.



Exercice 6.
Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $H = t(2z+1) + 3z$



Exercice 7.
Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $G = z(t+3) + t$



Retour tableau

Exercice 8.

On donne les expressions suivantes :

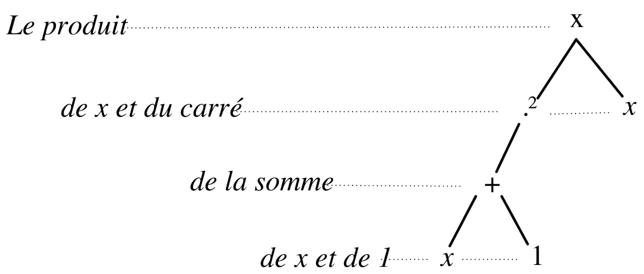
$A(x) = (x+3)x$, $B(x) = x^2 + x + 1$, $C(x) = \dfrac{2x-5}{3}$ et $D(x) = (3x-9)^2$

Pour chacune d'elles, construis un arbre de calcul et utilise-le pour obtenir un programme dont elle est le résultat.

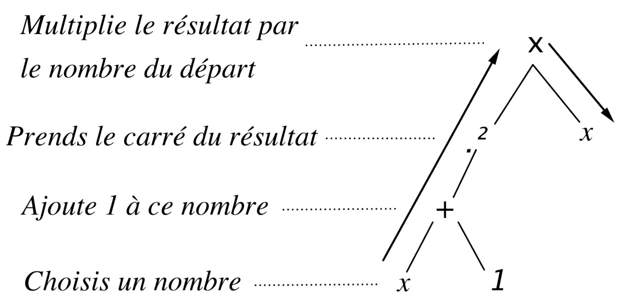
$\Rrightarrow$ **Aide pour l'exercice 8**

Voici une démarche possible pour l'expression $H(x) = (x+1)^2 x$.

Etape 1 Traduis en français l'expression et représente-la sous forme d'arbre.



Etape 2 Pour visualiser le programme à partir de l'arbre, tu remontes l'arbre du bas vers le haut à partir d'une des branches.



Etape 3 Tu peux maintenant écrire le programme de calcul :

- Choisis un nombre,
- Ajoute 1 à ce nombre,
- Prends le carré du résultat,
- Multiplie le résultat par le nombre du départ.

Tu peux remarquer que arbre de calcul et programme de calcul sont deux moyens pour interpréter une expression algébrique :

- l'arbre de calcul donne accès à la structure de l'expression (produit ou somme),
- le programme de calcul simule la lecture de gauche à droite de l'expression.

Retour tableau

Exercice 9.

1. Associe chaque expression à la phrase qui la décrit.

$(3ab)^2$ •	• Le triple du carré du produit de a par b
$3(ab)^2$ •	• Le triple du carré de a et de b
$3a^2b$ •	• Le carré du triple de a et de b

2. Associe chaque expression au programme de calcul qui la décrit.

$\dfrac{1}{2a}$ •	• Prendre un nombre, prendre son opposé puis prendre son carré
$-2a$ •	• Prendre un nombre, le multiplier par 2 puis prendre son inverse
$(-a)^2$ •	• Prendre un nombre, prendre son carré puis prendre son opposé
$-a^2$ •	• Prendre un nombre, le multiplier par 2 puis prendre son opposé

Retour tableau

Exercice 10.

On donne les expressions suivantes :

$$(3x-5)^2\,;\ (5x+3)^2\,;\ 25x^2+9+30x\,;\ 25x^2-9$$

$$(5x+3)(5x-3)\,;\ 15x^2-25\,;\ 5(3x^2-5)\,;\ 9x^2-30x+25$$

Place chaque expression dans la colonne qui convient, puis relie l'expression factorisée à l'expression développée.

Expression factorisée

Expression développée

⇛ **Aide pour l'exercice 10**

Aide pour la question 1. Tu peux déterminer si l'expression est un produit de facteurs ou une somme de termes. Une expression factorisée est un produit de facteurs. Une expression développée est une somme de termes.

Expression	Structure	Factorisée	Développée
$(b+3)(2b+1)$	Produit de $b+3$ et de $2b+1$	×	
$5+3h^2$	Somme de 5 et de $3h^2$		×

Aide pour la question 2. Tu peux factoriser ou développer les expressions après avoir reconnu la propriété de la distributivité ou une identité remarquable. N'hésite à pas à exploiter la structure des expressions. Rappel des propriétés, pour tous nombres a, b et c :

- distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c)=ab+ac$,
- identités remarquables : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Retour tableau

EXERCICE 11.
Complète le tableau ci-dessous puis factorise les expressions non factorisées.

Expression	Expression déjà factorisée	Expression non factorisée	
		Nombre de termes	Facteur commun
$A(x) = (3x+2)(4x+3)+(3x+2)(x-4)$			
$B(t) = 3(7+5t) - (7+5t)(9t+2)$			
$C(z) = (2z+1)(z-2) + 2z + 1$			
$D(u) = (3u+7)(3u-7)$			
$E(y) = y(2y+6) + 3(y+3)$			
$F(h) = 9h^2 - 12h + 16(3h-4)$			
$G(z) = 36z^2 - 49$			

EXERCICE 12.
Complète le tableau ci-dessous puis factorise les expressions non factorisées.

Expression	Expression déjà factorisée	Expression non factorisée	
		Nombre de termes	Facteur commun
$H(u) = (u+2)^2 + (-3u+5)(u+2)$			
$I(t) = (2t+36)^2(-3t+15)$			
$J(z) = (z+2)^2 - 4(z+1)^2$			
$K(u) = 4u^2 + 25u + 9 + 16 - 5u$			
$L(y) = -(7y+3)(6y+5) - 9(6y+5)$			
$M(h) = h^2 - 2h + 1 + 5(h-1)$			

⇛ **Aide pour les exercices 11 et 12**

1. Les expressions factorisées sont des produits de facteurs. Les expressions non factorisées ou développées sont des sommes de termes. Par exemple, pour déterminer si une expression est factorisée ou non, tu peux déterminer si elle est un produit ou une somme.

Expression	Structure	Factorisée	Développée
$t(6+t)$ $t \times (6+t)$	Produit de t et de $6+t$	$\times$	
$5u+v$	Somme de $5u$ et de v		$\times$

2. Tu peux utiliser l'algorithme de factorisation d'une expression A suivant :

Si A est un produit de facteurs alors l'expression est déjà factorisée.

Si A est une somme de termes alors

Si le facteur commun est apparent, alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

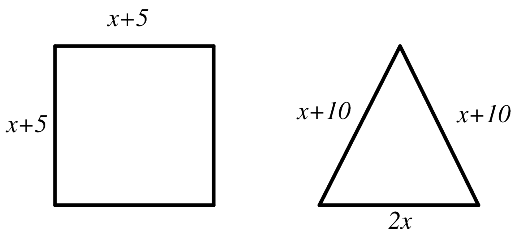
3. Exemples :

$K(x) = 5x(x+1) + (2x+2)$
K est la somme des deux termes $5x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent.
On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun :
$K(x) = 5x(x+1) + 2(x+1)$.
On utilise la propriété de distributivité pour factoriser :
$K(x) = (x+1)(5x+2)$.
K est un produit, l'expression est factorisée.

$I(x) = 4x^2 + 12x + 9$
I est la somme de trois termes : $4x^2$, $12x$ et 9. Aucun facteur commun n'est apparent.
I est une somme dont le 1^{er} et le $3^{\text{ème}}$ terme s'écrivent $(2x)^2$ et 3^2, et dont le $2^{\text{ème}}$ est le double du produit de $2x$ par 3 :
$I(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$.
Pour factoriser, on utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$I(x) = (2x+3)^2$.
I est un carré, l'expression est factorisée.

Retour tableau

Exercice 13.
Les figures ci-dessous ont-elles le même périmètre ?



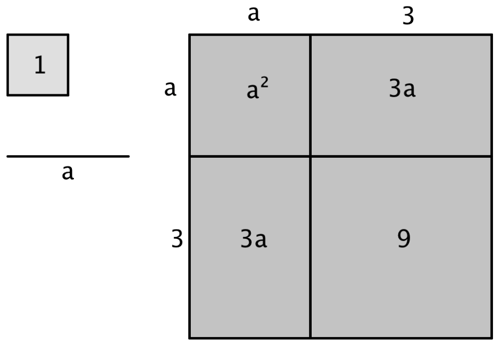
Retour tableau

Retour à la table des matières

Aide pour l'enseignant

Exercices 1 et 2

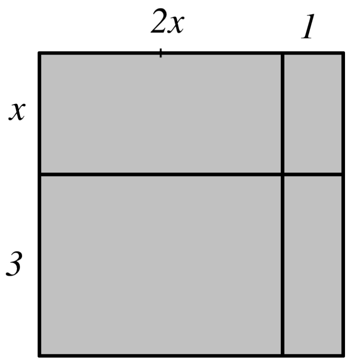
• Pour les élèves en $B+$, les égalités fausses peuvent être déstabilisées à l'aide de contre-exemples issus du domaine des grandeurs (longueur, aire). Une unité étant choisie, chaque membre de l'égalité peut être représenté par une longueur (degré 1) ou une aire (degré 2). Par exemple, $3p = 3 + p$ et $p^2 = 2p$ sont des égalités fausses.



• Vous pouvez utiliser un grapheur pour tracer les courbes associées aux expressions de chaque membre d'une égalité.

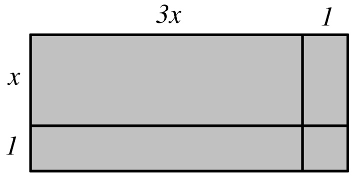
Exercice 4 question 1

Vous pouvez proposer l'aide suivante pour les élèves en B+.
Quelle est l'aire du grand rectangle ? Quelle est l'aire de chaque petit rectangle ?



Exercice 3

Pour les élèves du sous-groupe $B+$, l'équivalence peut être conjecturée dans le domaine des grandeurs pour la question 3.



Retour tableau

Retour à la table des matières