LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

Sonia BEN NEJMA- Lamjed BRINSI

Pour citer cet article :

Ben Nejma, S., Brinsi, L. (2022). La résolution des équations différentielles dans un environnement informatique, *Mathematice, 78* en ligne : http://revue.sesamath.net/spip.php?article1472

Résumé – Des instituts supérieurs d'études technologiques tunisiennes ont introduit des « ateliers de mathématiques appliquées ». Il s'agit d'un enseignement hybride à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Dans cet article, nous nous intéressons aux difficultés rencontrées par les étudiants de 1ère année pour résoudre des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler. Nous mettons en avant des enjeux liés à la double transposition didactique et informatique de cette technique numérique de résolution et nous analysons les productions écrites et numérisées des étudiants en réponse à un contrôle proposé par l'enseignant. Nous tentons de trouver des raisons explicatives des erreurs commises par les étudiants lors de la résolution du problème mathématique dans les environnements papier-crayon et Maple.

Mots-clefs : enseignement hybride, équations différentielles, Euler, erreurs, pratiques.

Abstract – Higher institutes of technological studies in Tunisia have introduced "Applied Mathematics Workshops". It is a hybrid education at the interface of mathematics and computer science. In this article, we are interested in the difficulties encountered by 1st year students in solving first order differential equations by the Euler method. We highlight issues related to the dual didactic and computer transposition of this digital resolution technique and we analyze the written and digitized productions in response to a control proposed by their teacher. We try to find explanatory reasons for the errors made by the students when solving the mathematical problem in the classic and Maple environments.

Keywords: hybrid teaching, differential equations, Euler, errors, practices.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

L'enseignement des mathématiques dans les institutions des études technologiques tunisiennes (ISET) est intégré au contexte général d'un enseignement technique à vocation professionnelle. Il s'agit essentiellement des notions de base utiles dans l'enseignement des disciplines techniques comme l'électricité, la mécanique, l'automatique et notamment les traitements des signaux. Certaines institutions ont introduit depuis quelques années dans le cadre des licences appliquées un élément constitutif des unités d'enseignements en mathématique intitulé : « *Atelier Mathématiques Appliquées* ». Ce module d'enseignement est destiné aux étudiants de 1ère année de licence et apparaît comme un moyen de renforcer l'enseignement de certaines notions mathématiques rencontrées par les étudiants au cours des séances de cours intégrés par le biais de logiciels de calculs symboliques et numériques tels que « Maple et Matlab ». Il s'agit d'un environnement hybride à l'interface des mathématiques et de l'informatique qui se présente comme des « travaux pratiques spécialisés en mathématiques ». On peut lire : « ECUE-3 : Atelier mathématique : utilisation de logiciels de calcul symbolique (Maple) et de calcul numérique (MATLAB) pour la mise en œuvre pratique du contenu théorique du programme des UE « mathématique 1 et 2 » : étude des fonctions, intégrales, résolution d'équations différentielles, opérations sur les vecteurs et les matrices ». (Fiche matière, Rapport de la commission d'évaluation de la licence en Génie électrique). Dans ce contexte particulier, nous nous intéressons aux pratiques des étudiants dans un environnement numérique, comment s'approprient-ils cet outil technologique au cours du processus de transposition informatique (Balacheff, 1994, Broner & Briant, 2015). De quelles façons l'utilisation d'un logiciel comme Maple impacte-t-elle la conceptualisation des notions liées aux ED (variable, fonction, primitive…) ? Dans quelle mesure contribue-t-elle à développer des flexibilités entre les registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993, 1995) impliqués dans la résolution ? Comment les étudiants de 1ère année universitaire mettent-ils en pratique des connaissances théoriques acquises au cours de ces séances d'ateliers pour résoudre des problèmes proposés par l'enseignant dans un environnement informatique ? Quelles raisons explicatives des difficultés rencontrées par les étudiants ?

Pour aborder cette problématique, qui s'inscrit dans le cadre du master de recherche en didactique des mathématiques du second auteur, (Brinsi, 2020) nous avons fait le choix d'une notion mathématique suggérée par les programmes officiels de cette institution universitaire, les équations différentielles linéaires (EDL). Les cours intégrés de mathématiques portent essentiellement sur la résolution algébrique des EDL du premier et du second ordre. Cependant, la résolution numérique par la méthode d'Euler fait l'objet des travaux pratiques associés aux programmes des ateliers de mathématiques. Nous nous intéressons à la fois aux enjeux mathématiques et didactiques liés à la transposition de cette méthode, de l'environnement papier-crayon à l'environnement informatique Maple, et aux pratiques des étudiants au moment de l'évaluation, c'est-à-dire à la suite de séances pratiques dispensées par leur enseignant autour des équations différentielles du premier ordre et de la méthode d'Euler. Cette notion mathématiques présente l'intérêt d'articuler plusieurs registres de représentation sémiotiques (Duval,1996) et d'être exploitée dans un environnement informatique. De plus, elle se caractérise par le fait que sa résolution met en jeu plusieurs concepts mathématiques de manière implicite ou explicite (variable, équations, fonction, primitive, graphique …). Souvent, la maîtrise de ces concepts s'avère insuffisante ou faible mais difficilement repérable dans l'environnement classique (Ben Nejma & Jabrane, 2021). Nous faisons l'hypothèse que les séances de travaux pratiques, en particulier la résolution informatique via la manipulation de logiciels de calcul numérique, permettent de révéler des difficultés de conceptualisation cachées ou ignorées par l'institution lors de la manipulation de la machine. Dans cet article nous présentons d'abord le cadre théorique de cette recherche qui s'appuie à la fois sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) et l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), en particulier, les travaux de Briant et Bronner (2015) portant sur la double transposition. Nous proposons ensuite une analyse des enjeux didactiques relatifs à la résolution des équations différentielles par la méthode d'Euler et à sa transposition dans les deux environnements papier crayon et Maple. Nous exposons finalement les principaux résultats issus de l'analyse des productions écrites et numérisées des étudiants recueillies à la suite de la passation d'un test de contrôle proposé par leur enseignant après avoir explicité notre méthodologie. Ces analyses sont illustrées par des extraits de productions.

II. CADRE THÉORIQUE

La description des attentes de l'institution et des pratiques développées par les étudiants renvoie à des concepts de base de la théorie anthropologique du didactique (TAD) Chevallard (1999), en particulier la notion de praxéologie qui permet de modéliser toute activité mathématique en termes d'organisations mathématiques (OM) et didactiques (OD). Cette modélisation permet à la fois de prendre en compte cette relativité institutionnelle et de mettre en avant les techniques mises en œuvre pour un même type de tâches. Dans l'analyse des organisations mathématiques, il est important de répondre à la question : de quoi est formée une technique ? De quels ingrédients se compose- t-elle ? la TAD introduit les concepts d'ostensifs et de non-ostensifs dans une problématique de modélisation des connaissances mathématiques. L'activité mathématique est considérée comme une activité mentale et intellectuelle car elle sollicite la raison, le raisonnement, les idées, les intuitions avec peu de matériel qui est considéré comme une aide à l'activité tels que l'écriture, les graphismes, les mots, le discours… ont leur spécificité en tant que signes occupant la place d'autres objets qu'ils représenteraient. Ainsi, l'activité mathématique est conditionnée par des instruments matériels, visuels, sonores, tactiles qu'elle met en jeu et qui renvoient à des ostensifs. Cette dimension, qui est indispensable à la construction d'un concept, est considérée comme la fonction instrumentale dans la construction d'une notion et renvoie à des non-ostensifs. Les idées, les intuitions, les notions, les concepts sont des non ostensifs qui peuvent être sollicités et évoqués en manipulant les ostensifs qui leurs sont associés. Dans l'analyse de l'activité mathématique, la dialectique ostensif/non-ostensif est souvent conçue en termes de signes et de signification : les objets ostensifs sont des signes d'objets non-ostensifs qui en constituent le sens ou la signification. Ainsi les termes « fonction » et « primitive d'une fonction » sont des objets ostensifs renvoyant aux concepts de fonction et de primitives qui sont des non-ostensifs omniprésents à plusieurs niveaux d'une organisation mathématique, aussi bien technique que technologico-théorique. Ainsi, « la mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non ostensifs » (Bosch et Chevallard 1999, p.87) et la technologie qui la justifie se traduit entre autres par des non-ostensifs.

Pour analyser une organisation mathématique développée dans un environnement informatique, nous faisons référence à « l'approche instrumentale » développée par Rabardel 1995) qui permet de distinguer entre l'artefact qui représente *« l'outil nu », l'objet matériel ou abstrait, qui est proposé à* un utilisateur potentiel pour soutenir un certain type d'activité et l'instrument est en fait le résultat du *processus* d'appropriation de l'artefact, par le sujet, dans la confrontation à des situations données. Le processus de développement d'un artefact en instrument que renvoie au concept de genèse instrumentale (Rabardel,1995) qui met en jeu deux processus en interaction dans la réalisation d'une activité mathématique : l'instrumentalisation et l'instrumentation. Le premier est relatif à la personnalisation de l'artefact par le sujet et le second est relatif à l'émergence des schèmes d'utilisation chez le sujet, c'est-à-dire à la façon avec laquelle l'artefact va contribuer à pré structurer l'action du sujet, pour réaliser la tâche en question. En effet, un concept ne peut être accessible seulement avec une définition. Il prend sens à travers des problèmes à résoudre. Pour résoudre un problème, les élèves utilisent des « schèmes ». « Un schème est une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données ». (Vergnaud, 1991). Un schème est donc un modèle mental activé dont la finalité est d'organiser la résolution d'un certain type de tâche. Si le schème est adapté à la situation alors il permettra de résoudre le problème posé. Les schèmes dépendent de la représentation de la situation dont l'énoncé peut se présenter sous forme de texte, d'expression algébrique ou de représentation graphique par exemple. Cette représentation peut aiguiller la résolution et donc le type de schème utilisé. Finalement, les résolutions sont liées aux schèmes activés et donc aux représentations sémiotiques appelés dans ces schèmes. Béguin et Rabardel (2001) distinguent trois types de schèmes d'utilisation, les schèmes d'usage renvoyant à l'interaction du sujet avec l'artefact, les schèmes d'action instrumentée dirigés vers l'objet de l'activité et convoquant les schèmes d'usages pour atteindre les buts poursuivis et les schèmes d'action collective instrumentée, en référence à l'utilisation d'artefacts par plusieurs sujets, simultanément ou conjointement. Dans notre étude, ces deux cadres sont pris en compte pour éclairer les points de vue instrumental et praxéologique dans une activité mathématique, ici, la résolution d'une EDL du premier ordre par la méthode d'Euler en tenant compte des spécificités de l'environnement informatique. La mise en place d'une résolution numérique dans cet environnement passe par la mobilisation de l'algorithme d'Euler dans un langage approprié. La résolution algorithmique suppose à son tour l'appropriation de cette technique et une manipulation appropriées des ostensifs qui la constituent, donc une résolution mathématique du problème au préalable. Les travaux de Briant et Bronner, (2015) autour de double transposition didactique et informatique nous a semblé intéressants à exploiter dans le cadre de ce travail pour approcher la complexité de la résolution informatique d'un problème mathématique. En effet, « lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée, nous voyons émerger une double transposition, associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement » (Briant & Bronner, 2015, p.236). Les auteurs mettent en avant la distance qui sépare l'activité initiale de résolution d'un problème mathématique dans l'environnement habituel (papier/crayon), de sa programmation et apportent une distinction supplémentaire entre algorithme informatisé (le langage « pseudo-code ») et « programme informatique » (en langage informatique). Trois types de résolution sont définis dans le processus de la double transposition, la résolution mathématique engagée dans l'environnement classique papier-crayon qui donnera lieu à un premier algorithme (algorithme mathématique), la résolution algorithmique qui consiste à transposer l'algorithme mathématique en un algorithme informatique, écrit en pseudo-code (1ère transposition) et la résolution informatique qui consiste à transposer l'algorithme informatisé en un programme via un langage informatique adapté au logiciel (2ème transposition), comme l'illustre la figure suivante.

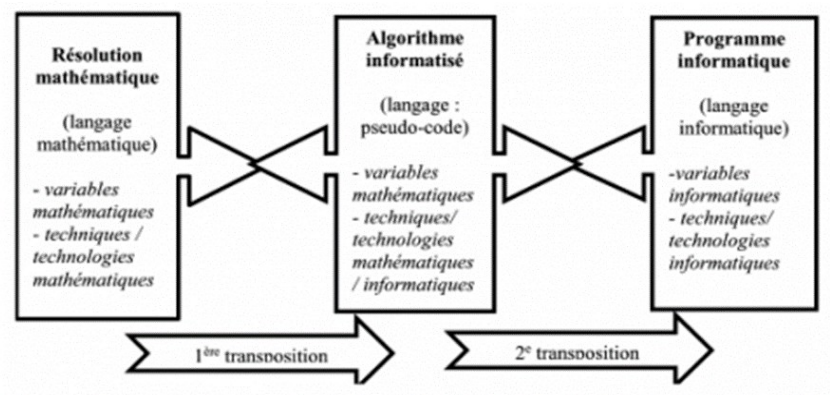


Figure 1 *– Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation (Briant, Bronner, 2015)*

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, l'introduction de l'approche numérique de résolution des EDL par la méthode d'Euler, dans un cadre d'enseignement hybride, celui d'un environnement informatique associé à l'environnement papier crayon permet de mettre en évidence des difficultés des étudiants relatives à la conceptualisation des ED qui ne sont pas toujours visibles dans l'environnement classique (papier crayon). Les points de vue théoriques étant présentés, nous exposons notre étude épistémologique relative à la résolution des EDL par la méthode d'Euler.

III. CADRE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE

1. Une description de la méthode d'Euler

Dans leur cursus scolaire, les étudiants sont souvent habitués à des équations du premier ou second degré à une inconnue qui se présentent sous forme d'égalités et dont la résolution consiste à déterminer l'ensemble des valeurs qui vérifient l'égalité. Lorsque les étudiants sont confrontés pour la première fois à la résolution des équations différentielles, « relation qui portent sur des fonctions et leurs dérivées », dont les inconnues ne sont plus des nombres mais des fonctions numériques, cela constitue une rupture épistémologique avec leurs connaissances antérieures et constitue un saut conceptuel important. Les solutions d'une équation différentielle représentent une famille de fonctions, alors qu'ils ont souvent à faire à un ensemble dénombrable de solutions d'une équation algébrique. De plus, la résolution la plus convoquée des EDL est la résolution algébrique. La méthode d'Euler est une occasion de développer chez les étudiants des compétences en rapport avec la résolution numérique. On ramène l'équation différentielle du premier ordre à la forme : (E) :$y'=f(x,y)$ où f est une fonction numérique à deux variables réelles. La solution lorsqu'elle existe sur un intervalle I représente une fonction u dérivable sur I et vérifiant : «$\forall x \in I,\ u'(x)=f(x,u(x))$». La mise en œuvre d'une telle technique met en avant une solution approchée qui se présente sous forme d'une fonction affine par morceaux sur I. Ainsi, l'étudiant manipule des ostensifs qui renvoient à des fonctions de nature différentes : la fonction numérique y de la variable x, la fonction numériques f à deux variables réelles (x, y), la fonction affine par morceaux (solution d'Euler) et la fonction solution exacte dans le cas d'un problème de Cauchy, satisfaisant aux conditions d'existence et d'unicité de la solution. Il s'agit ainsi d'une procédure qui permet d'approcher la solution d'une EDL du premier ordre connaissant une condition initiale présentée sous la forme suivante $\begin{cases} y'=f(x,y), x_0\le x\le x_0+T \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ (problème de Cauchy). Les objets mathématiques et les relations en jeu sont en général accessibles pour des étudiants de première année universitaire, de plus cette méthode a un caractère algorithmique et programmable ce qui justifie la raison d'être de cette approche dans les programmes de cette institution universitaire. C'est une méthode approximative basée sur la discrétisation de la variable x. L'intervalle $[x_{0,}x_0+T]$ est divisé en un nombre N de subdivisions de même longueur $h=\frac{T}{N}$, finalement la méthode d'Euler renvoie une liste $(y_0,y_1,\dots,y_N)$ des valeurs approchées des $y(x_i)$ où $x_i=x_0+ih$ et y désigne la solution « exacte » de l'équation différentielle. La courbe (d'Euler) polygonale reliant les points $M_i(x_i,y_i)$, est une approximation graphique de la solution « exacte », elle offre une vision approximative du comportement de fonction $y(t)$solution « exacte » sur l'intervalle $[x_{0,}x_0+T]$ Ainsi, si l'on souhaite que cette vision soit bonne, le pas de discrétisation h doit être suffisamment petit, et par conséquent le nombre N des itérations (le nombre de valeurs à calculer) peut alors devenir très important, ce qui impose une certaine économie et rapidité de calcul et une mémorisation importante d'où la nécessité de l'outil informatique. La méthode d'Euler suppose que la solution visée y du problème de Cauchy existe et pour une valeur raisonnablement petite de h et $x\in[x_0,x_0+T]$,l'expression $y(x)+h.f(x,y(x))$ est une bonne approximation de $y(x+h)$. C'est-à-dire $y(x+h)\approx y(x)+h.f(x,y(x))$ (formule d'Euler). Cette formule peut être obtenue en supposant que la solution visée y est dérivable et par suite admet un développement limité au moins à l'ordre 1 au voisinage de tout point x de l'intervalle. On peut donc écrire que : $y(x+h)=y(x)+h.y'(x)+o(h)$ ou en supposant simplement la dérivabilité de la solution visée en tout point $x\in\ [x_0\,x_0+T]$,c'est à dire $\lim_{h\to 0}\left(\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\right)=y'(x)$ et alors pour $h\approx 0$ on a : $\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\approx y'(x)=f(x,y)$ ou encore en intégrant l'équation différentielle sur l'intervalle $[x,x+h]$, ce qui se traduit par : $y(x+h)-y(x)=\int_x^{x+h} y'(s)ds=\int_x^{x+h} f(s,y(s))ds\approx h.f(x,y)$, pour h assez petit, comme l'illustre le graphique suivant.

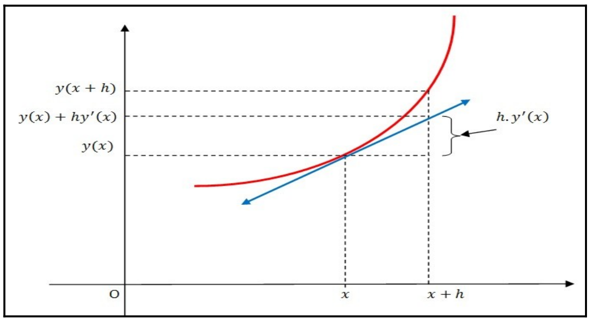


Figure 2*– Illustration graphique de la méthode d'Euler*

La valeur estimé de la solution y au point $x_1 = x_0 + h$ si on la note $y_1$est donnée par : $y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$, celle aux point $x_2 = x_0 + 2h = x_1 + h$ si on la note y_2 est donnée par : $y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1)$, et ainsi de suite on construit la suite réelle récurrente $(y_k)_{0 \le k \le N}$ des valeurs approchées des $y(x_k)$ les valeurs de la solution « exacte » y aux points $(x_k)_{0 \le k \le N} = (x_0 + kh)_{0 \le k \le N}$, appelée suite d'Euler, par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k); \end{cases} \forall\, 0 \le k \le N-1$$

La fonction$Y$ affine par morceaux définie sur l'intervalle $[x_0, x_0+T]$ par $Y(x_k) = y_k$ pour $k \in \{0,1,\dots.N\}$, c'est-à-dire la fonction définie par :$Y(x) = f(x_k, y_k)(x - x_k) + y_k;$ pour tout $pour x \in [x_k, x_{k+1}] et k \in \{0,1,\dots.N-1\}$ est une approximation de F la solution exacte du problème : $\begin{cases} y' = f(x, y), x_0 \le x \le x_0 + T \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

La courbe polygonale de la fonction Y (la courbe reliant les points $M_k(x_k, y_k)$ est une courbe approximative de la solution visée F , et une étude qualitative de celle-ci peut nous renseigner sur le comportement de$y$ (variations, extremums, valeur en un point x…).

Pour $t \in [x_0, x_0+T]$ il existe $k \in \{0,1,2,\dots,N-1\}$ tel que $t \in$ c'est-à-dire

$x_0 + kh \le t < x_0 + (k+1)h$, et alors $k \le \frac{t - x_0}{h} < (k+1)$ donc k désigne la partie entière de $\frac{t - x_0}{h}$ qui s'écrit habituellement$E\left(\frac{t - x_0}{h}\right)$ d'où, une approximation de la valeur de y(t) prise par la solution « exacte » de notre équation différentielle obtenue par la méthode d'Euler est : $F(t) \approx Y(t) = y_k + (t - x_k).f(x_k, y_k)$ où $k = E\left(\frac{t - x_0}{h}\right)$, on a $x_k \le t < x_k + h$ c'est-à-dire :

$0 \le t - x_k < h$ et comme h est assez petit alors $t - x_k \approx 0$ et alors $y(t) \approx y_k$ où $k = E\left(\frac{t - x_0}{h}\right)$,

2. *Des enjeux didactiques relatifs à l'application de la méthode d'Euler dans les environnements papier crayon et Maple*

La mise en œuvre de la méthode d'Euler passe par trois étapes : la première consiste à construire une suite de points à partir de l'équation différentielle, il s'agit d'un passage du continu au discret, la deuxième consiste à la détermination d'une liste ou une table de valeurs numériques et la dernière renvoie à un passage du discret au continu permettant d'obtenir la construction graphique. Chaque étape requière un changement de registre de représentation sémiotique (Duval, 1996). Le passage de l'équation différentielle à la suite numérique est réalisé dans l'environnement papier/crayon en appliquant la suite des termes d'Euler. Nous résumons les registres convoqués dans la résolution des EDL par la méthode d'Euler et les caractéristiques marquantes dans le passage d'une étape à l'autre selon l'environnement de travail dans le tableau suivant :

Environnement papier- crayon		Environnement Maple	
Etape1		Etape2	Etape3
Registre algébrique continu ➔	Registre algébrique discret ➔	Registre numérique ➔	Registre graphique
Equation différentielle $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' = f(x,y) \end{cases}$	Suites numériques $x_k = x_0 + k.h$ $y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k)$	Liste des valeurs numériques approchées des x_k et des y_k	Courbe des points isolés discrets $M_k(x_k, y_k)$ Courbe polygonale reliant les points $M_k(x_k, y_k)$

***Tableau 1** – Les registres de représentations sémiotiques impliqués dans la méthode d'Euler dans les environnements classiques et informatiques (Brinsi, Ben Nejma, 2020)*

Pour déterminer la liste ou (le tableau) des valeurs approchées des termes de la suite d'Euler, les étudiants ont recours au logiciel Maple suggéré par le programme officiel de l'ISET. Ce logiciel permet d'effectuer, les calculs des valeurs numériques des termes de la suite, de construire une ou plusieurs courbes approchées(courbes d'Euler), et de les superposer dans un même repère. Il permet aussi la détermination de la solution exacte dans le cas où une telle équation est accessible avec une technique algébrique, et en superposant sa courbe « exacte » avec des courbes approchées obtenues avec différentes valeurs du pas h. on pourra à partir de l'écart entre les différentes courbes et celle exacte constater l'effet du pas choisi (ou du nombre de subdivision de l'intervalle d'étude). Comme l'illustre la figure suivante :

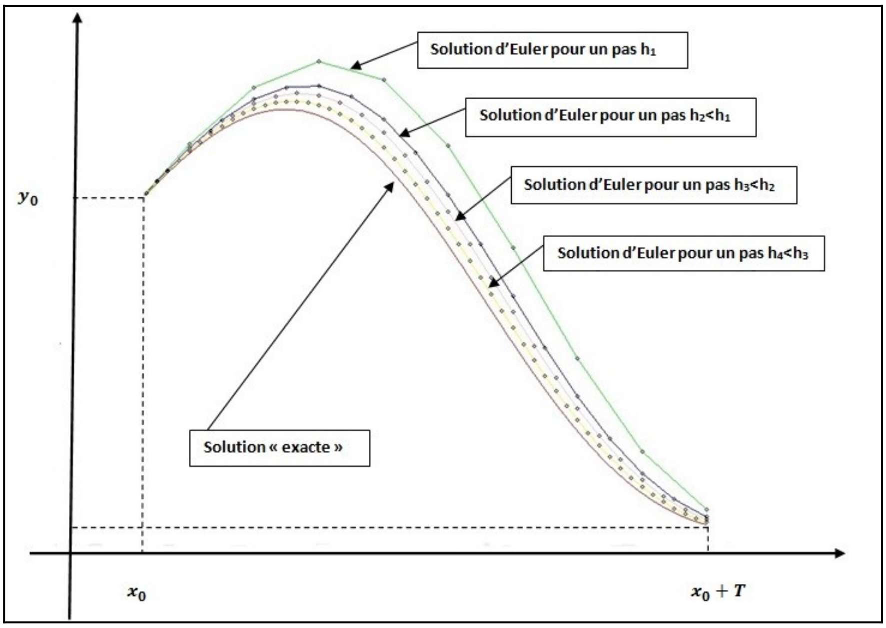


***Figure 3**– L'usage de Maple dans l'approximation des solutions d'une EDL par la méthode d'Euler*

IV. CADRE D'ANALYSE ET MÉTHODOLOGIE

1. *Une adaptation du modèle de la double transposition à la méthode d'Euler*

En s'inspirant du modèle de la double transposition développé par Briant et Broner (2015), nous avons d'abord procédé à une description des techniques de résolutions mathématique, algorithmique et informatique impliquées dans la méthode d'Euler que nous proposons de développer.

- La résolution mathématique consiste en la résolution du problème dans le cadre mathématique « habituel », c'est-à-dire dans l'environnement classique papier-crayon. Cette résolution peut donner lieu à un premier algorithme : « algorithme mathématique ».

- La résolution algorithmique : une fois la résolution mathématique achevée, une première transposition aura lieu pour déterminer un algorithme informatisé, écrit en pseudo-code. Dans certains cas l'algorithme mathématique, utilisé habituellement dans l'environnement papier-crayon, nécessite des connaissances relatives à l'objet mathématique en question, qui ne sont pas généralement implantées de base dans un logiciel quelconque de programmation. Si le cas se présente il est exigé d'en chercher d'autres qui tiennent compte des actions élémentaires réalisables par la machine ou le logiciel de programmation intégrée. C'est ce que les auteurs (2015) nomment « algorithme informatisé »

- La résolution informatique : L'opération qui aboutit à l'écriture du programme avec un langage informatique adéquat au logiciel en jeu, à la suite de la première transposition. Nous synthétisons ces caractéristiques dans me tableau suivant.

	Résolution mathématique	Résolution algorithmique	Résolution informatique
ED du premier ordre avec condition initiale dont la solution existe sous certaines conditions	Suite d'Euler relative à l'ED	Algorithme d'Euler relative à l'ED Boucle « for »	Programme de calcul des termes de la suite d'Euler relative à l'ED, implémenté par la boucle « for »
Approcher par la méthode d'Euler la solution de l'ED : $(E) : \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Sur l'intervalle : $[x_0, x_0+T]$	-Choisir N le nombre de pas de discrétisations de l'intervalle $[x_0, x_0+T]$ et définir le pas de discrétisation : $h = T/N$ -Définir les suites d'Euler : $\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{k+1} = x_k + h \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k) \end{cases}$	Initialisation des données T,N et h Initialisation des conditions initiales $x = x_0$;$y = y_0$ Tant que $x \leq T$; faire a-calcul de $\mathrm{k = f(x,y)}$; b-$\mathrm{y = y + k * h}$ $x = x + h$ c-enregistrer les données	$T := \cdots ; N := \cdots ;$ $h := \frac{T}{N} ; x := x_0 ;$ $y := y_0$ For i from 0 to N-1 do ; K=f(x,y); Y=y+h*k X=x+h; od ; print(x, y) ;
	1ière transposition	2ième transposition	

Tableau 2 – La *double transposition dans la résolution numérique d'une EDL par la méthode d'Euler (Brinsi, Ben Nejma, 2020)*

La première transposition *« transposition algorithmique »* se fait à différents niveaux :

- ***Au niveau du langage*** : il s'agit de passer d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste 2012, p.62) à un langage en *pseudo-code* ressemblant semblable au langage de programmation, débarrassé de ses problèmes de syntaxe. Modeste (2012, p.24) le présente comme « *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématiques* » ;

Le second niveau prend en compte la spécificité des praxéologies relatives à la théorie anthropologique du didactique, en particulier les organisations mathématiques développées autour d'une notion mathématique ou d'une tâche à accomplir :

- ***Au niveau des techniques***, celles-ci différent d'un algorithme à un autre, de même les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées.

La seconde transposition : *transposition informatique* se fait à son tour à différents niveaux **:**

- ***Au niveau du langage*** : il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation, ce qui nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par la machine, selon sa structure interne et dans son langage.

- *Au niveau des variables* : les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques :

> « Au niveau des techniques et technologies utilisées : aux techniques et technologies-théories propres à la résolution du problème en environnement papier-crayon viennent s'adjoindre celles liées aux principes de programmation informatique (notion de variables informatiques, affectation de variables, lecture/écriture, structures alternatives, structures répétitives. » (Briant –Bronner ,2015, p.237).

Ces travaux permettent de prendre en considération dans un environnement informatique une dimension qui n'existe pas dans un environnement papier-crayon induisant un mode de pensée différent. L'existence de la transposition algorithmique est un aspect didactique important pour comprendre des phénomènes liés à l'apprentissage des mathématiques en général. Ce concept est intimement lié, comme nous l'avons déjà évoqué, aux organisations mathématiques mises en œuvre au niveau des pratiques d'apprentissage. Nous souhaitons recueillir des informations sur la manière dont les étudiants gèrent ces deux environnements pour accomplir les tâches proposées. Comment organisent-ils le travail mathématique, algorithmique et informatique dans cet environnement ? Quelles sont les difficultés inhérentes à la transposition informatique ?

2. *Contexte de l'expérimentation et recueil de données*

Notre expérimentation s'est déroulée au dernier trimestre de l'année universitaire 2018-2019 avec des étudiants de première année universitaire, section Génie Electrique. Nous avons assisté aux séances d'ateliers dispensées par l'enseignant autour des équations différentielles. Au cours de ces séances, l'enseignant se centre principalement sur les techniques instrumentales relatives à la résolution algébrique et numérique via la méthode d'Euler en utilisant Maple. L'algorithme d'Euler est proposé par l'enseignant et il est demandé aux étudiants d'exécuter ce programme sur machine afin de visualiser graphiquement la solution exacte ou approchée d'une ED du premier ordre difficilement solvable voire insolvable par une technique algébrique à la main. Le logiciel Maple présente entre autres une instruction « dsolve » permettant de résoudre certaines équations différentielles (les équations accessibles avec les techniques algébriques). Cette commande commence par classer le type d'équation en jeu (linéaire, Bernoulli, Riccati, à variables séparables, et d'autres situations plus exotiques) et applique la méthode de résolution appropriée. Lorsque l'on travaille sur les équations différentielles on a souvent recours aux calcul différentiel, calcul intégral, calcul approché, graphiques… pour ce faire, des bibliothèques « Maple » sont disponibles et doivent alors être chargées en cas de besoin via les instructions: > with(DEtools); > with(student) ; > with(plots) ;et > with(linalg) , elles sont spécifiques à la résolution algébrique des équations différentielles, au calcul différentiel, et intégral, aux graphiques et à quelques notions d'algèbre linéaire. Les instructions des chargements des bibliothèques Maple citées doivent êtres généralement précédées par la commande : « >restart ; » qui permet de réinitialiser toutes les variables de la page de calculs « Maple », chaque instruction pourra être terminée par deux points « : ». Une équation différentielle est une équation mettant en jeu une fonction, ainsi qu'un certain nombre de ses fonctions dérivées. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit : $F(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}, x) = 0$ où y représente une fonction de la variable x et les , $y^{(k)}$ ses dérivées successives. Donc d'un point de vue formel, le problème se pose de la même manière que pour les équations algébriques, mais avec la différence essentielle que l'inconnue n'est plus un scalaire réel ou complexe, mais une fonction ou une classe de fonctions c'est à dire un objet mathématique plus complexe pour les étudiants. Cela exige une connaissance de syntaxes spécifiques aux fonctionnalités du logiciel, notamment, en ce qui concerne les fonctions numériques, les équations algébriques et les graphiques que les étudiants ont rencontrés au cours des séances de travaux pratiques précédant celles des ED. A la fin de la séance l'enseignant propose aux étudiants un problème à résoudre par binômes (annexe) à titre d'évaluation. Ce problème comporte deux parties, une « partie théorique » à accomplir dans l'environnement papier- crayon et dont l'objectif est d'évaluer la maîtrise de la résolution algébrique d'une équation différentielle du premier ordre avec condition initiale et une « partie pratique » qui vise à évaluer la technique instrumentale mise en œuvre par les étudiants pour résoudre numériquement l'équation proposée par la méthode d'Euler. La passation du test a lieu en salle d'informatique équipée d'ordinateurs. Les étudiants sont répartis en 4 binômes qui sont autorisés à accéder sans restriction à la manipulation de cet artefact et à présenter leurs productions (compte rendus) à la fin de la séance (une durée d'une heure trente). Ces productions sont à la fois écrites (résolution dans l'environnement papier-crayon) et numérisées (résolution enregistrée sur machine). Nous avons procédé à l'analyse des données recueilles en repérant les trois étapes de la double transposition didactique et informatique du problème posé. Pour chaque étape, il s'agit d'identifier les techniques mobilisées par les étudiants et les schèmes qui semblent mobilisés. En effet, la mise en œuvre de la méthode d'Euler va solliciter la coordination de schèmes liés au graphique et d'autres de nature algébrique ou analytique**.** Nous restituons la façon dont ces schèmes sont activés par les étudiants lors de ce processus. Ces schèmes peuvent se manifester dans le registre de représentation (discursif, graphique, algébrique, analytique) et avoir différentes fonctions (Trouche, 2005) *une fonction heuristique* (contrôle, organisation de l'action), une *fonction pragmatique* (action, transformation) et *une fonction épistémique* (prise d'information, compréhension).

3. Méthodologie d'analyse

Une analyse a priori de la situation est conduite en référence aux outils théoriques en considérant deux OML (organisations mathématiques locales) dans l'environnement p/c relatives à : (RA) Résolution algébrique et (RG) représentation graphique de l'allure de la courbe de la solution. Nous faisons l'hypothèse que dans l'environnement Maple le processus d'instrumentation modifie en partie ces deux OML, les techniques et les procédures de réalisation ne fonctionnent pas de la même manière que dans l'environnement papier/crayon. Nous identifions les stratégies possibles attachées aux processus de l'instrumentation pouvant permettre la modélisation du problème dans Maple. Nous mettons en avant deux organisations mathématiques locales (OML), RGI : représentation graphique de la solution et RGE : représentation graphique de la solution par la méthode d'Euler. Quatre critères relatifs à RGE sont identifiés :

C1 : Le programme est correctement appliqué, la courbe est tracée et le développement des calculs est pertinent.

C2 : La représentation graphique minimale ou approximative et les calculs algébriques pertinents.

C3 : La représentation graphique minimale et les calculs algébriques non pertinents.

C4 : La représentation graphique sans le développement du calcul associé.

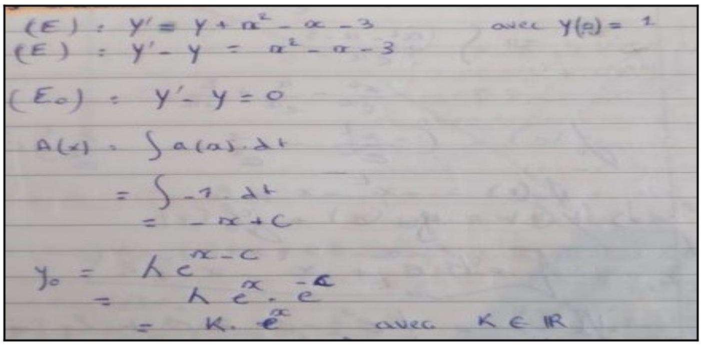
Notons que le degré d'élaboration de la représentation graphique par la méthode d'Euler est l'aboutissement d'un programme de calcul ou d'un algorithme de résolution appliqué correctement. L'interprétation de la courbe, la résolution numérique de l'équation différentielle et l'approche de certaines valeurs numériques renvoient à l'enjeu que le graphique représente par rapport à la résolution du problème. Si les étudiants font une courbe relativement vague ou erronée, celui-ci ne peut être qu'une entrée dans le problème de façon intuitive, cette courbe ne sert alors à rien dans la mise en place de la résolution numérique de l'équation différentielle ou encore dans l'interprétation de la résolution algébrique. Lorsque la courbe est élaborée correctement, cela renvoie à une application correcte du programme de résolution par la méthode d'Euler et une maîtrise des commandes de Maple. L'interprétation du graphique sera l'indice de l'interaction qu'il peut y avoir entre la représentation graphique et la résolution algébrique ou numérique de l'ED en jeu**.**

V. PRINCIPAUX RÉSULTATS RELATIFS AUX PRATIQUES DES ÉTUDIANTS

L'analyse des pratiques des étudiants relatives à la résolution du problème posé a permis de mettre en avant des constats intéressants dans les environnements classique et informatique sur la base des traces écrites et numérisées.

Dans l'environnement papier-crayon

- La plupart des étudiants interrogés mettent en œuvre la technique algébrique sans prise en compte des informations qui figurent dans l'énoncé (nature de l'ED, condition initiale), ce qui complique en quelque sorte la situation et engage ainsi les étudiants dans des démarches dépourvus de sens. Par exemple pour résoudre l'équation homogène associé à l'ED proposée étant usuelle (y'=y), les étudiants ramènent celle-ci à la forme générale institutionnalisée ($y' + a(x)y = 0$) et procèdent ainsi à une démarche algorithmisée. Une fois la tâche résolue, ils procèdent à la recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante alors que celle-ci est homogène et ne nécessite aucune recherche de solution particulière. Les étudiants semblent développer un schème de nature pragmatique selon lequel « toute ED du premier ordre possède une solution particulière dont la résolution passe par la recherche d'une solution particulière via la méthode de variation de la constante », comme il est illustré dans cet extrait.


$(E) : y' = y + x^2 - x - 3$ avec $y(0) = 1$

$(E) : y' - y = x^2 - x - 3$

$(E_0) : y' - y = 0$

$A(x) = \int a(t).dt$

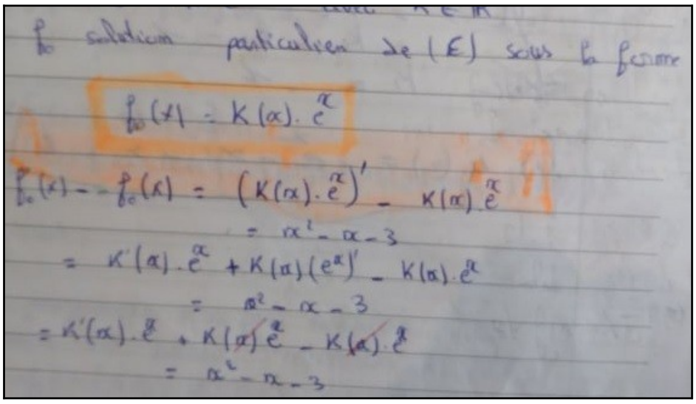
$= \int -1.dt$

$= -x + C$

$y_0 = \lambda e^{x-C}$

$= \lambda e^{x}.e^{-C}$

$= K.e^{x}$ avec $K \in \mathbb{R}$



f_0 solution particulière de (E) sous la forme

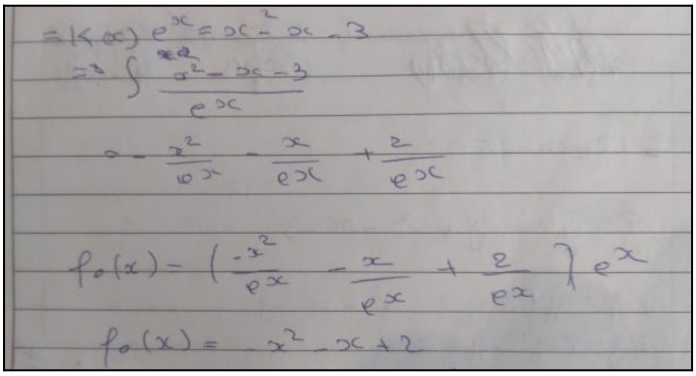
$\boxed{f_0(x) = K(x).e^x}$

$f_0'(x) - f_0(x) = (K(x).e^x)' - K(x).e^x = x^2 - x - 3$

$= K'(x).e^x + K(x)(e^x)' - K(x).e^x = x^2 - x - 3$

$= K'(x).e^x + K(x)e^x - K(x).e^x = x^2 - x - 3$

La mise en œuvre de la méthode de variation de la constante les conduit à rechercher la primitive d'une fonction qui s'appuie sur une intégration par parties qui n'apparaît pas dans les traces écrites des étudiants. On retrouve d'emblée, la primitive cherchée sans explicitation de la technique: $\lambda(x)=\int \frac{x^2-x-3}{e^x}dx=\frac{-x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$ comme nous pouvons le voir sur cet extrait



$= K'(x) e^x = x^2 - x - 3$

$\Rightarrow \int \frac{x^2 - x - 3}{e^x}$

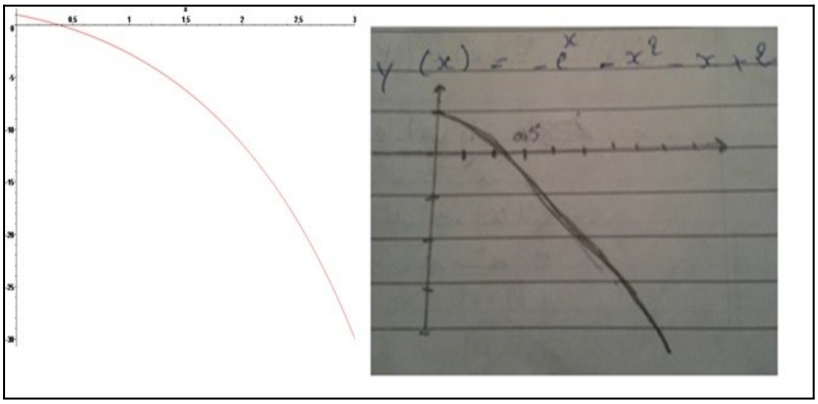
$= -\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$

$f_0(x) = \left(\frac{-x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) e^x$

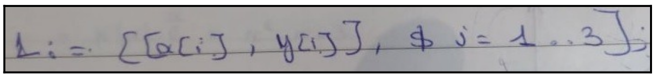
$f_0(x) = -x^2 - x + 2$

L'intégration par parties convoquée par la recherche de cette primitive étant nécessaire et absente des productions écrites des étudiants, il semble évident qu'ils ont eu recourt à l'environnement informatique via la commande « int » pour trouver la réponse attendue par une résolution mathématique de l'équation. La technique instrumentale mise en œuvre dans ce cas, > **`int((x**2-x-3) /exp(x), x) ;`** a été réussie, ainsi Maple fournit les rétroactions attendues par les étudiants : $-\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$. Cette pratique renvoie au phénomène de « détournement d'usage » ou « usage inattendu » identifié dans les travaux de Trouche, 2007.

- Les productions recueillies laissent entrevoir un travail graphique très appauvri et dépourvu de justifications (C4). Les étudiants ont recours à une résolution informatique pour obtenir l'allure de la courbe solution de l'ED proposée en faisant l'impasse sur la résolution mathématique pourtant convoquée par la partie théorique. Un schème de nature heuristique semble mobilisé. Les étudiants reproduisent sur leurs copies l'allure obtenue sur l'écran sans s'interroger sur les fondements mathématiques sous-jacents au résultat de ce processus, c'est-à-dire sans justification au moyen de l'étude de la fonction solution comme il est illustré sur ce compte rendu comprenant à la fois le fichier numérisé du binôme et la production remise.



- Les traces retrouvées dans les copies des étudiants en rapport avec la mobilisation de la méthode d'Euler révèlent une utilisation non raisonnée de cette technique avec des confusions entre les variables informatiques et les variables mathématique. Ce phénomène est révélé par une manipulation confuse des ostensifs en lien avec les concepts en jeu dans cette résolution (pas, intervalle, fonction et expression algébrique de la fonction…). Ces confusions apparaissent au niveau de la mobilisation de l'algorithme d'Euler qui semble employé sans qu'une signification des variables informatiques ne soit installée, par exemple les étudiants ne parviennent pas à distinguer le compteur des itérations via l'ostensif i (discret) de la variable réelle x dans un l'intervalle (continue), comme nous pouvons le voir sur cet extrait.



L'écriture de l'instruction : « >`l : = [[x[i], y[i]] $i=0..3];` » retrouvée sur la copie d'un binôme témoigne de la confusion qui a lieu par exemple entre le compteur entier symbolisé par la variable i (dans ce cas varie de manière discrète de 0 à N=120) et la variable réelle x qui varie dans l'intervalle [0,3].

- D'autres schèmes de nature épistémique sont développées en lien avec la conceptualisation de certaines notions mathématiques comme celles d'équation, fonction, courbe ou expression algébrique sont révélées par un emploi erroné des ostensifs comme f et f(x). Les étudiants semblent reproduire l'algorithme relatif à la méthode d'Euler qui leur a été dispensé au cours des séances de travaux pratiques sans en comprendre la signification et sans contrôle des solutions par un retour à la situation. On ne retrouve d'ailleurs aucune tentative de réponse à la dernière question dont l'objet est d'interpréter la courbe d'Euler obtenue en tant qu'approximation de la solution exacte, en termes d'amplitude du pas et d'erreurs d'estimation.

Dans l'environnement informatique Maple

L'analyse du travail accompli par les étudiants à partir des enregistrements réalisés sur machine est mise en regard avec l'analyse des traces produites sur leur copies, ce qui a permis de déceler d'autres difficultés relatives à la transposition d'un environnement à l'autre. Par exemple concernant la tâche : résoudre le problème à valeur initiale, trois binômes sur quatre procèdent à une technique instrumentée inutile via l'instruction :> **dsolve(eq,y(x));** ce qui entraîne la réponse affichée : $y(x) = x^2 - x + 2 + \mathrm{e}^x \_C1$ puis se mettent à la recherche de la constante convenable en perdant de vue que celle-ci peut facilement être retrouvée encore une fois sur la base de la même technique via l'instruction :

> **dsolve({eq,y(0)=1},y(x));**

- Au niveau de la reproduction de l'algorithme relatif à la méthode d'Euler, des confusions sont apparues dans la mobilisation des variables informatiques témoignant d'une confusion entre non-ostensifs véhiculées par les ostensifs f et f(x), y et y(x) et celles liées à la différentielle dy/dx. Cette résolution algorithmique vouée à l'échec montre les difficultés rencontrées par les étudiants à distinguer entre expression algébrique de la fonction solution et l'équation différentielle elle-même, ainsi que la fonction à deux variables et sa dérivée. L'extrait suivant illustre notre constat :

```
> f : =diff(y(x),x)=y(x)+x**2-x-3;
```

$$f := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x) = y(x) + x^2 - x - 3$$

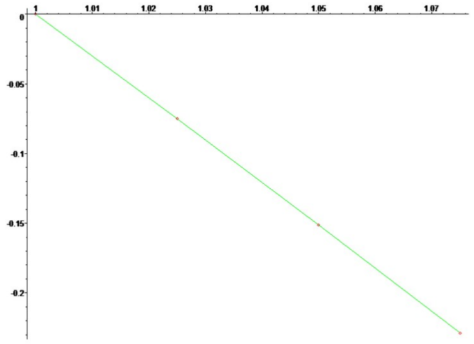
La même erreur se reproduit par ailleurs dans l'emploi du compteur i « discret » et la variable x « continue » ce qui montre les difficultés de conceptualisation de ces notions que l'environnement informatique a permis de déceler via la résolution algorithmique écrite et les rétroactions de Maple comme l'illustre l'extrait du fichier numérisé suivant.

```
> l:=[[x[i],y[i]]$i=0..3];
plot(l,style=point,color=red);
f1 :=plot(l,style=point,color=red):

        l := [[1, 0], [1.025000000, -.07500000000], [1.050000000, -.1512343750],
            [1.075000000, -.2287027344]]

> plot ( l,style=line,color=green );
f2 :=plot ( l,style=line, color=green ):
```

L'instruction>`l:=[[x[i],y[i]]$i=0..3];`montre que les étudiants en appliquant la méthode d'Euler ne distinguent pas entre le compteur entier désigné par i allant de 0 à 30 (discret) et la variable réelle x qui appartient à l'intervalle [0,3],(continue).

Un des objectifs de la situation proposée en évaluation est d'amener les étudiants à mobiliser une technique instrumentée permettant l'obtention d'un graphique par la résolution numérique d'Euler qui sera confronté avec celui obtenu à l'issu de la résolution mathématique du problème dont le travail est convoqué dans la partie théorique. L'environnement informatique servirait alors à valider ou à invalider les résultats obtenus, ce qui n'a pas été le cas puisque l'on ne retrouve aucune trace qui montre que les étudiants ont contrôlé leurs résultats comme il est visible sur cet extrait.

```
> l:=[[x[i],y[i]]$i=0..3];
plot(l,style=point,color=red);
f1 :=plot(l,style=point,color=red):

        l := [[1, 0], [1.025000000, -.07500000000], [1.050000000, -.1512343750],
            [1.075000000, -.2287027344]]
> plot ( l,style=line,color=green );
f2 :=plot ( l,style=line, color=green ):
> plot ( l,style=line,color=black );
f3 :=plot ( l,style=line, color=black ):
> display (f1,f2,f3);
```



VI. CONCLUSION ET DISCUSSIONS

Les analyses menées dans le cadre de cette recherche ont permis de mettre en avant des difficultés rencontrées par les étudiants qui se situent à plusieurs niveaux de la transposition du problème posé aussi bien dans l'environnement papier crayon que dans l'environnement informatique. Ces difficultés révèlent une maîtrise insuffisante des concepts impliqué dans la méthode d'Euler bien que celle-ci ait été rencontrée par les étudiants au cours des séances de travaux pratiques. Les études réalisées sur la base des compte rendus des étudiants montrent des confusions flagrantes entre les variables informatiques et mathématiques lors de la mobilisation de l'algorithme. La résolution informatique a permis de déceler ces difficultés de conceptualisation que l'environnement classique seul n'aurait pas permis de déceler. Par ailleurs, l'aller- retour entre théorie et pratique, donc entre les environnements papier crayon et informatique est un objectif visé par ces ateliers de mathématiques qui ne semble pas atteint à la vue des résultats obtenus à ce problème d'évaluation. Les techniques instrumentées non raisonnées employées par les étudiants et l'absence de contrôle des solutions ou du travail graphique témoignent de cette difficulté d'interaction. Il semble que les pratiques des étudiants viennent en partie répondre à des pratiques institutionnelles qui ne favorisent pas cette interaction entre les deux environnements, dans la mesure où, celles-ci se centrent essentiellement sur les calculs algébriques dans les séances de cours intégré et sur les manipulations de l'artefact lors des séances de travaux pratiques sans se soucier de l'étape fondamentale de la résolution algorithmique qui permettrait de passer d'un environnement à un autre. Par exemple, l'approche algébrique est présente dans l'enseignement supérieur mais elle n'est pas opérationnalisée dans le registre graphique. De plus, la méthode d'Euler qui n'est pas un objet d'enseignement du cours intégré de mathématique et se limite aux travaux pratiques soulève des interrogations quant à l'importance accordée à cette technique et à sa mise en œuvre dans la pratique. Cela expliquerait en partie les difficultés des étudiants à se conceptualiser certaines notions et à se centrer sur les manipulations au détriment d'une résolution raisonnée du problème. Nous souhaitons à travers cette étude modifier le rapport institutionnel et personnel aussi bien des étudiants que des enseignants autour de l'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques souvent conçus comme de simples adjuvants pédagogiques qui interviennent uniquement au niveau d'organisations mathématiques ponctuelles alors qu'elles représentent des éléments praxéologiques de l'activité mathématique qui permettant de développer à long terme chez les étudiants une genèse instrumentale du savoir mathématique à enseigner.

REFERENCES

Artigue M. (1995). Un regard didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM*, *19*, 77–108

Balacheff N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques 14*(1), 9-42.

Ben Nejma S, Jabrane, A (2021). Une analyse de la transposition didactique des équations différentielles en terminale scientifique : réformes curriculaires et défis institutionnels- *IJARTech International Journal of Applied Research and Technology, ,3,* 5-23, Retrieved the 1st November 2021 on https://www.ijartech.com/lirePDF2.php

Brinsi L. (2020). *La résolution numérique des équations différentielles dans un environnement informatique en première année d'université : pratiques enseignantes et genèse instrumentale des étudiants.* Mémoire de master de recherche en didactiques des mathématiques.-Isefc-Université virtuelle de Tunis.

Briant N., Bronner A. (2015), Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In Theis L. (Ed.) *Actes du colloque EMF2015 – GT3* : *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage,* 231-246.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Revue de didactique des mathématiques, 19* (2), 221-266. La pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, Grenoble.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives (5)*, 37-65. IREM de Strasbourg.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissagesintellectuels.* Berne : Peter Lang.

Duval R. (1996a). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques, 16* (3), 349–382.

Duval R. (1996b) Les représentations graphiques : fonctionnement et conditions de leur apprentissage », *Actes de la 46ème Rencontre internationale de la CIEAEM,* tome 1, 3–15 : Université Paul Sabatier, Toulouse.

Modeste S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments Contemporains*. Paris : Armand Colin.

Trouche L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25,* 91-138.

Annexe

Situation2 :

Soit l'équation différentielle (E) :$y' = y + x^2 - x - 3$ et y(0)=1.

Partie théorique

1/ Sans utiliser Maple, résoudre l'équation différentielle (E) .On notera f cette solution.

2/Représenter graphiquement f dans un repère (O, I, J).

Partie pratique

1) En utilisant Maple représenter graphiquement f sur [0,3[.(en bleu)

2) Résoudre (E) sur [0,3[par la méthode d'Euler à pas h = 3/30, h= 3/60 et h=3/120et représenter graphiquement f_1 , f_2 , *et* f_3 les solutions approchées (en rouge, vert et noire), dans le même repère que f

3) Interpréter les résultats obtenus et conclure.