Hommage à Brigitte Bardot

Cette énigme, qui repose en partie sur la preuve par 9, date des alentours de 1960. Chacune des lettres représente un chiffre différent, autre que zéro.

```
   S E X
   S E X
   ------
 B ▪ ▪ ▪
B ▪ ▪ ▪
▪ ▪ ▪ ▪
-----------
B A R D O T
```

▪ De $\overline{SEX} \times \overline{SEX} \geq 123456$ on tire $\overline{SEX} \geq \sqrt{123456}$, puis $\boldsymbol{\overline{SEX} \geq 352}$.

▪ *Utilisons la preuve par 9* : $(S + E + X)^2 \equiv B + A + R + D + O + T \ (mod. 9)$. Observons que les neuf lettres figurant dans l'équation sont forcément les neuf chiffres de 1 à 9, dont la somme est 45. En posant $S + E + X = u$, il vient : $u^2 \equiv 45 - u \ (mod. 9)$. Donc 9 divise $u(u + 1)$ et, comme u et $u + 1$ sont premiers entre eux, 9 divise l'un des deux. En outre $u < 9 + 8 + 7$, ce qui prouve que **$S + E + X$ ne peut valoir que 8, 9, 17 ou 18**.

▪ Aucun des nombres S, E, X ne vaut 1, car le produit de $\overline{SEX}$ par chacun d'entre eux a quatre chiffres. Le plus petit triplet a priori possible est donc $\{2, 3, 4\}$, ce qui exclut déjà $S + E + X = 8$; si ce triplet est valable, on a donc $S + E + X = 9$ et $\{S, E, X\} = \{2, 3, 4\}$. Comme $\overline{SEX} \geq 352$, cela donne $S = 4$. Mais 432 est à exclure, car 432^2 a 4 pour chiffre des unités et on aurait $S = T$. En outre 423 est aussi à exclure, car 423×2 n'a que trois chiffres. On aboutit ainsi à une impossibilité.
Finalement **$S + E + X$ ne peut valoir que 17 ou 18**.

▪ *Supposons que* $B = 1$. On aurait $\overline{BARDOT} < 200000$ donc $\overline{SEX} < 200\sqrt{5}$ et $\overline{SEX} \leq 447$, d'où $S \leq 4$. On aurait aussi $E \times \overline{SEX} < 2000$, donc $E < \frac{2000}{352}$, ce qui donne $E \leq 5$. Le même raisonnement appliqué à X donne $X \leq 5$. Il en résulterait $S + E + X \leq 4 + 5 + 5 < 17$, ce qui est impossible.

Ainsi $\boldsymbol{B \geq 2}$ et $\overline{SEX} \geq \sqrt{213456}$, ce qui donne $\boldsymbol{\overline{SEX} \geq 462}$.

▪ *Supposons que* $S = 4$. De $462^2 \leq \overline{SEX}^2 < 500^2$ on tire $213444 \leq \overline{BARDOT} < 250000$. On aurait donc $B = 2$, ce qui donnerait $2000 < \overline{SEX} \times X < 3000$; la première inégalité donne $X > \frac{2000}{500}$, soit $X > 4$. Mais X ne peut valoir ni 5 ni 6, sinon on aurait $X = T$ (comparer le chiffre des unités de $\overline{SEX}$ et celui de $\overline{BARDOT}$). Finalement $X \geq 7$. Mais de $\overline{SEX} \times X < 3000$ on tirerait $\overline{SEX} < \frac{3000}{7}$, donc $\overline{SEX} < 428$, alors que $\overline{SEX} \geq 462$. Ainsi $\boldsymbol{S \geq 5}$.

▪ $E \times \overline{SEX}$ et $X \times \overline{SEX}$ ont tous deux une écriture du type $\overline{B***}$, donc leur différence est inférieure à 1000, donc $|X - E| < \frac{1000}{\overline{SEX}} < \frac{1000}{500}$, ce qui prouve que $\boldsymbol{|X - E| = 1}$.

▪ Le détail de la multiplication montre que le premier chiffre à gauche dans l'écriture de $S \times \overline{SEX}$ est au plus égal à B. Si c'était B, le même raisonnement que dans le paragraphe précédent donnerait $|S - E| = 1$ et $|S - X| = 1$. Les différences deux à deux de S, E, X

seraient toutes égales à 1, ce qui est impossible. L'écriture de $S \times \overline{SEX}$ commence donc par un chiffre inférieur à B, donc $\boldsymbol{S < X}$ et $\boldsymbol{S < E}$.

▪ Nous avons $\begin{cases} S + E + X \leq 18 \\ S \geq 5 \end{cases}$, donc $E + X \leq 13$. Mais X et E sont supérieurs à S, donc valent au moins 6. En outre X ne peut valoir 6 (on aurait $X = T$). On arrive donc à $\boldsymbol{E = 6, X = 7}$. La seule valeur possible de S, qui leur est inférieur, est 5, d'où $\boldsymbol{\overline{SEX} = 567}$.

▪ Il reste à montrer que cette valeur convient bien (voir ci-contre).

$$
\begin{array}{r}
567 \\
567 \\
\hline
3969 \\
3402 \\
2835 \\
\hline
321489
\end{array}
$$