DEVOIR MAISON n° 7

----

1 Je suis nul en calcul mais je me soigne

C'est super chouette d'avoir un logiciel ou une calculatrice à calcul formel ! Mais au fait, à quoi cela peut bien servir en terminale ?

Et bien, lorsque l'on est *pas très bon en calcul*, cela permet de vérifier ses résultats et évite ainsi de se poser des questions auquel même votre professeur ne s'attend pas ; cela permet aussi d'émettre des conjectures et avoir une idée de ce qu'il faut démontrer.

En tout cas, ce qui est certain, c'est qu'après ce devoir, vous n'aurez aucune excuse pour les erreurs de calculs dans un devoir maison ou un exercice à faire à la maison !

2 Je me soigne avec des médicaments appropriés

Tout type de logiciels ou calculatrices à calcul formel est accepté. Cependant, ce devoir ne donnera que la syntaxe xcas (parcourir le menu scolaire pour éviter de taper les commandes).
En ce qui concerne les courbes, les figures ou les tables de valeurs, on pourra utiliser geogebra, un tableur ou la calculatrice (xcas peut aussi convenir, ce dernier étant un tout-en-un).

Vous pouvez installer chez vous xcas `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html` et geogebra `http://www.geogebra.org` ou les utiliser directement en ligne.

3 Je remplis moi-même mon ordonnance

Vous aurez pour chaque question,
- à me donner soit sur votre feuille la syntaxe utilisée par votre logiciel et les résultats donnés (captures d'écran acceptées), soit un fichier compressé à déposer sur Moodle ;
- à donner succinctement la méthode ou les étapes essentielles permettant de résoudre à la main la question.

4 Les différents type de maladie

Vous rendrez pour ces deux exercices les étapes essencielles permettant de résoudre à la main les questions

4.1 Le virus fonctionnel

France septembre 2005

Le logiciel xcas fait la distinction entre une fonction et une expression. Une fonction est définie soit par `f(x):= x+1` soit par `f:=x->x+1` ; on peut alors calculer $f(2)$, $f(3)$, etc. On vérifie que l'on obtient une fonction lorsque xcas affiche le résultat `x->....` Par contre, si on rentre une expression `f:=x+1`, on ne pourra plus déterminer des images par f mais on pourra faire des études de signes ou autres.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On trace la courbe sous geogebra : `f(x)=(20*x+10)*exp(-.5*x)`

et dans le même temps, on utilise xcas

```
f(x):= (20x+10)*exp(-1/2*x)   // Il est nécessaire d'utiliser l'écriture fractionnaire
```

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

   ```
   limite(f(x),x,+infinity)
   ```

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

   On trace la fonction dérivée sous geogebra en rentrant `f'(x)`.

   et avec xcas, on cherche à étudier le signe de la dérivée.

   ```
   g:=deriver(f(x))   // Expression de la dérivée
   factoriser(g)      // Une factorisation pour avoir une petite idée
   resoudre(g=0,x)      // Résolution de f'(x) = 0
   resoudre(g>0,x)      // Résolution de f'(x) > 0
   ```

3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

   Avec geogebra, on trace la droite d'équation $y = 10$. On place le point d'intersection de cette droite et de la courbe de f. L'abscisse de ce point est une valeur approchée de α.

   on peut utiliser aussi xcas

   ```
   fsolve(f(x)=10,x,4.5)   // Résolution de f(x) = 10 par valeur approchée
                           // en utilisant le fait que cette valeur est proche de 4,5
   ```

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4.2 La bactérie complexe

la TI89 a un bug, il est conseillé d'écrire z_ à la place de z.

Asie juin 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + \mathrm{i})z^2 + (17 - 8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0\,.$$

```
f(z):=z^3+(-8+i)*z^2+(17-8*i)*z+17*i
```

Partie I *Résolution de l'équation (E)*

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).

   ```
   f(-i)
   ```

2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 + (-8 + \mathrm{i})z^2 + (17 - 8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z + \mathrm{i})\left(az^2 + bz + c\right)\,.$$

   ```
   simplifier(f(z)/(z+i))   // on simplifie le quotient
   ```

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

```
factoriser_sur_C(f(z))   // on demande la factorisation complète
```

ou

```
resoudre_dans_C(f(z),z)   // on résout f(z)=0
```

Partie II
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

   Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour faire la figure.

2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.

   Donner l'écriture complexe de la rotation (ne pas faire les calculs ! laissez ce travail ingrat à votre logiciel favori), la définir sous xcas puis faire calculer l'affixe de S. Vérifier par une construction géométrique de S par geogebra.

3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

   Tracer avec geogebra le cercle passant par A, B et C et utiliser la fenêtre d'algèbre pour obtenir une équation cartésienne de ce cercle. Vérifier (car geogebra ne donne que des valeurs approchées).

   puis/ou xcas :

```
z_A:=4+i
z_Omega:=2
abs(z_A-z_Omega)   // |z_A - z_Ω| = AΩ
```

5 Puis-je remplacer mon cerveau par mes logiciels ?

Pas encore. Comme exemple, voilà la suite du sujet de Asie 2005.

Asie 2005 (suite)

5. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M′ d'affixe

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z-2}.$$

```
g(z):= (i*z+10-2*i)/(z-2)
```

   a) Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ associés respectivement aux points A, B et C.

   b) Vérifier que A′, B′, C′ appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.

   c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - \mathrm{i}|$ en fonction de z.

   Que pensez-vous du résultat affiché par xcas lorsque l'on rentre abs(g(z)-i) ?

   d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $|z' - \mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.

   e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M′ associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

6 À vous ! Tout seul, comme des grands !

Vous aurez à donner d'une part la syntaxe du logiciel de calcul formel utilisé ainsi que le résultat obtenu et d'autre part les principales étapes pour une résolution à la main.

Pondichéry 1999

Vous rédigerez entièrement la question 2*b*) après avoir justifié que pour tout complexe Z non nul, on a $\arg\left(Z^2\right) = 2\arg(Z) \pmod{2\pi}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0.$$
On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. *a*) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

   b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   a) Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

   b) Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   c) Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

   d) Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

   e) Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

Asie 2006

On considère l'équation différentielle
$$(E): \quad y' + y = e^{-x}.$$

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = (x+k)e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Vous aurez à utiliser un logiciel de calcul formel mais aussi un logiciel de géométrie dynamique tel que Geogebra permettant d'obtenir les courbes $\mathscr{C}_k$ en faisant varier le nombre k (utiliser la fonction *Curseur* située dans la barre de menu).

1. Vérifier que f_k est solution de (E).
2. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
4. En déduire le tableau de variations de f_k.

7 Le parasite arithmétique

L'exercice suivant peut-être fait avec un tableur ou à la calculatrice. Il sera présenté ici avec xcas.

Vous aurez à émettre une conjecture à l'aide d'un logiciel puis prouver votre conjecture.

Épreuve pratique 2006

Pour tout entier n, on pose $a(n) = 4n+1$ et $b(n) = 5n+3$. On veut déterminer le pgcd $(a(n);b(n))$ en fonction de n.

1. *Conjecture*
   a) À l'aide d'un logiciel, donner pgcd $(a(n);b(n))$ pour quelques valeurs de n.
   ```
   f(n):= gcd(4n+1,5n+3)
   f(n)$(n=0..25)
   ```
   b) Quelle semble-être les valeurs possibles de pgcd $(a(n);b(n))$?
   c) En observant les résultats obtenus, comment pensez-vous pouvoir caractériser les valeurs de n telles que pgcd $(a(n);b(n)) = 7$?
2. *Preuve de la conjecture*
   a) Soit d un diviseur positif commun à $a(n)$ et $b(n)$. Justifier que
   $$\begin{cases} d \mid a(n) \\ d \mid b(n) \end{cases} \iff \begin{cases} d \mid a(n) \\ d \mid 7 \end{cases}$$
   b) En déduire une preuve de votre conjecture.