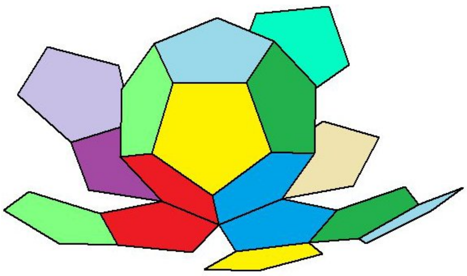
Le *Lights Out*: un petit jeu mathématique

Thibault Defourneau, Florent Dewez

Université de Valenciennes
Institut des Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Valenciennes (LAMAV)



“ Faire des maths autrement... ”

1 Le jeu vu sous l’angle des mathématiques

Dans cette première partie, nous allons modéliser mathématiquement le jeu, c’est-à-dire le traduire en langage mathématique, afin de pouvoir le comprendre autrement et ainsi de le résoudre dans n’importe quelle situation.

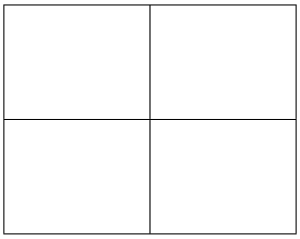
1.1 Le cadre de l’atelier

Tout au long de cet atelier, nous aurons besoin d’un ensemble de 2 nombres avec une addition particulière.
Considérons l’ensemble composé des nombres 0 et 1, que l’on notera $\{0, 1\}$, et définissons les règles d’addition suivantes:

$$0 + 0 \ = \ldots \quad ; \quad 1 + 0 \ = \ldots \quad ; \quad 0 + 1 \ = \ldots \quad ; \quad 1 + 1 \ = \ldots$$

Les mathématiciens appellent cet ensemble *le groupe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

De plus, nous n'allons pas étudier le jeu à 5×5 interrupteurs car les calculs seraient beaucoup trop longs... Afin d'éviter cela, nous allons nous restreindre au jeu à 2×2 interrupteurs:



1.2 Les états d'un interrupteur et la configuration d'un jeu

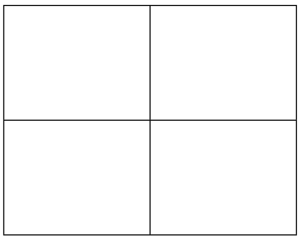
Puisqu'un interrupteur peut être soit *allumé*, soit *éteint*, nous allons coder cela mathématiquement; ceci veut dire qu'à chaque état allumé et éteint sera associé un nombre. On va faire comme suit:

- Si l'interrupteur est *éteint*, on lui associe le nombre ... ;
- Si l'interrupteur est *allumé*, on lui associe le nombre ... .

Maintenant, nous allons coder mathématiquement les *configurations du jeu.* Pour cela, nous allons tout d'abord numéroter les interrupteurs comme suit:

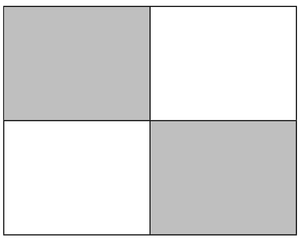
1	2
3	4

Grâce à cette numérotation, nous allons pouvoir coder n'importe quelle configuration dans une *colonne.*



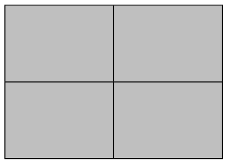
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Un exemple:



$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Questions 2.2 :
1) A chacune des configurations suivantes, donner la colonne correspondante.

a.  *b.*  *c.* 

2) A chacune des colonnes suivantes, représenter la configuration correspondante.

$$a. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

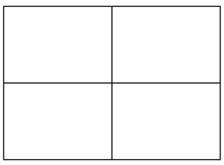
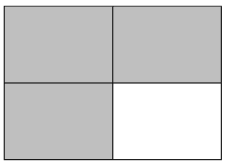
1.3 Les actions élémentaires

Nous appelerons *action élémentaire* le fait d'appuyer sur un seul interrupteur.

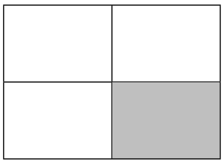
Ici, nous allons modéliser ces *actions élémentaires* sur le jeu à 2×2 interrupteurs. Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc ... actions élémentaires différentes, que nous allons noter comme suit:

- ...... : "Appuyer sur l'interrupteur 1 " ;
- ...... : "Appuyer sur l'interrupteur 2 " ;
- ...... : "Appuyer sur l'interrupteur 3 " ;
- ...... : "Appuyer sur l'interrupteur 4 " .

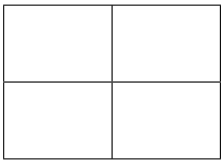
Pour comprendre la modélisation de ces actions élémentaires, nous allons regarder l'action de $+A_1$ sur les 3 exemples suivants:

 $\xrightarrow[+A_1]{}$ 

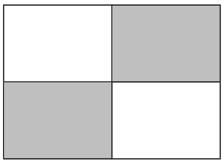
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



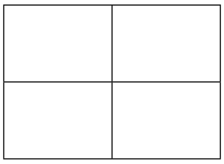
$$\xrightarrow[+A_1]{}$$



$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow[+A_1]{}$$



$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Comment sommes-nous passés des premières colonnes aux secondes ? Dans le premier cas, nous avons fait:

$$\begin{cases} 0 & + & \dots & = & 1 \\ 0 & + & \dots & = & 1 \\ 0 & + & \dots & = & 1 \\ 0 & + & \dots & = & 0 \end{cases}$$

et nous pouvons écrire cela en utilisant les colonnes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le second cas, nous avons:

$$\begin{cases} \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & = & \dots \end{cases} \quad \text{, c'est-à-dire,} \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

et dans le troisième cas:

$$\begin{cases} \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & = & \dots \end{cases} \quad \text{, c'est-à-dire,} \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

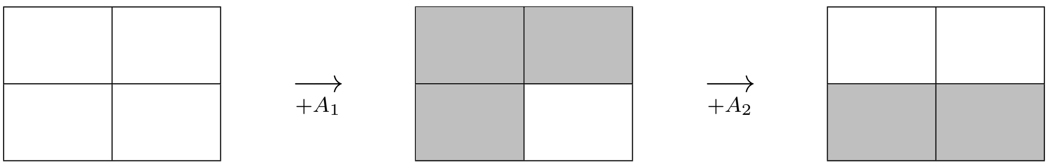
Nous pouvons alors conclure que l'action élémentaire $+\ A_1$ "Appuyer sur l'interrupteur 1" correspond mathématiquement à

Question 2.3 :
A quoi correspondent les actions $+\ A_2$, $+\ A_3$ et $+\ A_4$?

1.4 Les actions

Nous appelerons *action* le fait d'appuyer successivement sur des interrupteurs. Nous pouvons donc dire qu'une *action* est une .... d'*actions élémentaires*.

Tout d'abord, nous allons comprendre comment peuvent être modélisées deux actions élémentaires successives. On regarde l'exemple suivant:



$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire nous avons fait

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire

$$+A_1 + A_2 = + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Questions 2.4 :
1) Appliquer sur le jeu les actions suivantes et les calculer.

a. $+A_1 + A_4$ *b.* $+A_2 + A_3 + A_4$ *c.* $+A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

2) Appliquer sur le jeu $+A_1 + A_1$ *et* $+A_1 + A_1 + A_1$*, puis les calculer.*
Que peut-on dire si on appuie un nombre pair de fois sur un interrupteur ? Et un nombre impair de fois ? Est-il alors utile d'appuyer plus de deux fois sur un interrupteur ?

3) Appliquer sur le jeu $+A_1 + A_2 + A_3$, $+A_2 + A_1 + A_3$ *et* $+A_3 + A_2 + A_1$*, puis les calculer.*
Que peut-on dire concernant l'ordre des actions ?

D'après ce qui vient d'être fait, pour décrire une action, il suffit uniquement de savoir ....
Ainsi, si une action consiste à appuyer x fois sur l'interrupteur 1, y fois sur l'interrupteur 2, z fois sur l'interrupteur 3 et t fois sur l'interrupteur 4, alors nous écrirons cette action comme suit:

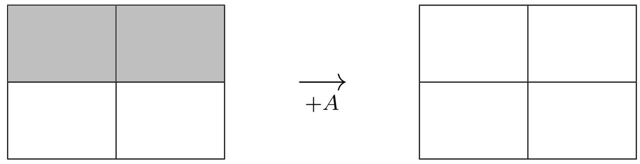
$$\underbrace{+\dots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{+A_1} \quad \underbrace{+\dots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{+A_2} \quad \underbrace{+\dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{+A_3} \quad \underbrace{+\dots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{+A_4}$$

où les nombres x, y, z et t appartiennent à ....

2 Les mathématiques pour résoudre le jeu

La modélisation du jeu que nous venons de faire permet de traduire le problème de la résolution du jeu en un problème mathématique, que nous pourrons résoudre.

Etant donné une *configuration de départ*, nous cherchons l'*action* $+A$ qui permet de l'éteindre:



$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Or d'après ce que nous avons fait avant, l'*action* $+A$ se décompose en *actions élémentaires*. Nous devons donc déterminer le nombre de fois où nous devons appuyer sur chaque interrupteur.
Mathématiquement, nous savons que nous pouvons écrire l'*action* $+A$ comme suit:

$$+\,x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +\ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +\ z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +\ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où

- x représente .... ;
- y représente .... ;
- z représente .... ;
- t représente ....

Cette situation se traduit ainsi:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}_{\text{Configuration de départ}} \quad \underbrace{+\,x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +\ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +\ z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +\ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Action } +A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}_{\text{Configuration d'arrivée}}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \\ \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \end{array} \right.$$

On appelle cela un *système linéaire* à 4 équations et 4 inconnues x, y, z, t. Le but est alors de trouver les nombres x, y, z, t qui sont solutions de ce système.
Grâce à la méthode .... (ou ....),
nous pouvons calculer la solution à la main ou à l'aide d'un programme informatique.
Dans notre exemple, nous trouvons

$$x = \dots \qquad y = \dots \qquad z = \dots \qquad t = \dots$$

Donc pour éteindre la configuration initiale ci-dessus, nous devons appuyer ... fois sur l'interrupteur 1, ... fois sur l'interrupteur 2, ... fois sur l'interrupteur 3 et ... fois sur l'interrupteur 4.

3 Un problème à plusieurs solutions

Nous allons voir dans cette dernière partie qu'il peut exister *plusieurs* solutions pour éteindre une configuration de départ.

3.1 Des actions particulières

Nous allons regarder cette fois-ci le jeu avec 16 interrupteurs:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

A présent, voici deux actions $+A'$ et $+A''$ (que l'on écrit en ligne):

- $+A' = +A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_7 + A_9 + A_{10} + A_{13}$
- $+A'' = +A_1 + A_2 + A_4 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{14}$

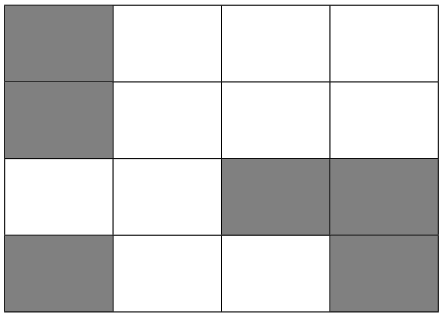
Questions 3.1 :
1) Appliquer sur le jeu ces actions. Que se passe-t-il ?

2) Que se passe-t-il si nous faisons $+A'$ puis $+A''$? Décomposer l'action $+A' + A''$ en actions élémentaires et appliquer sur le jeu le résultat trouvé.

Nous appelerons $+A'$ et $+A''$ des ...., c'est-à-dire ....
....

3.2 L'existence de plusieurs solutions

Nous allons montrer que ces .... sont utiles pour trouver différentes solutions qui éteignent une configuration de départ.
Nous illustrons cette idée avec la configuration de départ suivante:



et voici une action qui permet de l'éteindre:

$$+A = +A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{12}$$

Questions 3.2 :
1) Vérifier sur le jeu que l'action $+A$ *éteint la configuration de départ.*

2) Décomposer l'action de l'action $+A+A'$ *en actions élémentaires et appliquer le résultat à la configuration de départ. Que trouvons-nous?*

3) Même question pour $+A + A''$ *et* $+A + A' + A''$*.*

Par conséquent, nous voyons que si $+A$ est une solution d'une configuration de départ et si $+A'$ est une action nulle, alors $+A + A'$ est .... Et donc le nombre de solutions dépend du ....

3.3 Les meilleures solutions

Nous allons voir comment nous pouvons déterminer les *meilleures solutions* pour éteindre une configuration de départ donnée, c'est-à-dire les actions qui utilisent le moins d'actions élémentaires.
Pour cela, on reprend l'exemple précédent, dans lequel nous avons trouvé les 4 solutions suivantes:

- $+A = +A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{12}$
- $+A + A' =$
- $+A + A'' =$
- $+A + A' + A'' =$

Question 3.3 :
Quelles sont les meilleures solutions ?

4 Quelques liens internet

Page de téléchargement du jeu: `https://github.com/Mystelven/Interrupteurs`

Version en ligne du Lights Out: `http://www.addictinggames.com/puzzle-games/lightsout.jsp`

Lights Out en 3d: `http://www.addictinggames.com/puzzle-games/lightsout3d.jsp`