La latitude en fonction de la durée du jour le plus long

À mes chers élèves

À mes chers élèves

Sommaire

Introduction

Ptolémée a préféré à la méthode du gnomon la méthode de détermination de la latitude par la durée du jour le plus long c'est-à-dire au solstice d'été. J'ai tenu à formuler cette idée avec nos connaissances car la méthode de Ptolémée telle que nous la livre l'Almageste est difficile à suivre dans ses méandres.

Un gnomon permet de déterminer grâce aux ombres le jour de l'équinoxe (schéma 0). Les ombres sont en effet alignées aux équinoxes.

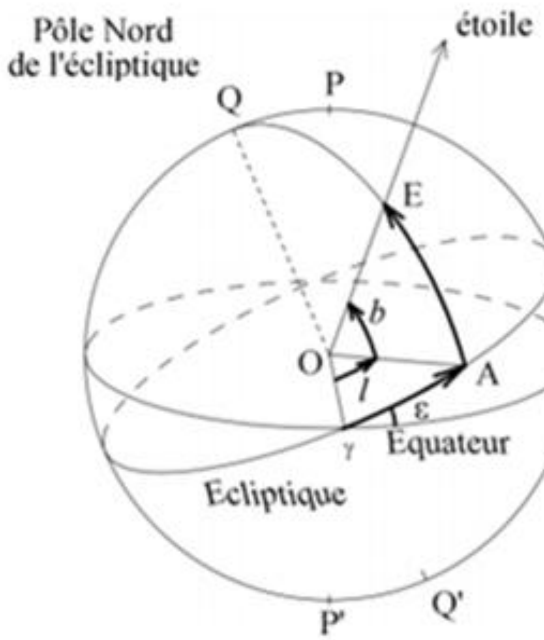
Cependant, j'ai cru bon aussi de montrer en quoi consiste la méthode de

détermination de la latitude par la méthode du gnomon.

----

0) Les coordonnées écliptiques et équatoriales

a) Les coordonnées écliptiques



Les éléments de référence sont :

- le plan de l’écliptique

- le point vernal γ

Le plan écliptique intersecte la sphère céleste selon un cercle : l’équateur céleste et l’écliptique se coupent en deux points dont l’un est le point γ franchi par le soleil le 20 ou 21 mars.

Le point γ comme toutes les étoiles a un mouvement apparent de rotation autour de l’axe des pôles.

O désigne le centre de la terre.

(QQ') est la droite passant par O perpendiculaire au plan de l'écliptique. Elle rencontre la sphère céleste en Q et Q' appelés pôles de l'écliptique.

Le pôle nord écliptique est celui d'où l'on verrait le soleil progresser dans le sens direct (sens inverse de la marche des aiguilles d'une montre) le long de l'écliptique.

(PP') est la droite passant par O et perpendiculaire au plan de l'équateur céleste.

Elle rencontre la sphère céleste en Pet P'. P est le pôle nord céleste, prolongement du pôle nord géographique.

Dans ce système de coordonnées, la direction d'un astre est définie par :

- sa **longitude écliptique** de 0° à 360°.

- sa **latitude écliptique** b variant de - 90° à 90° (positive dans l'hémisphère contenant le pôle nord écliptique.

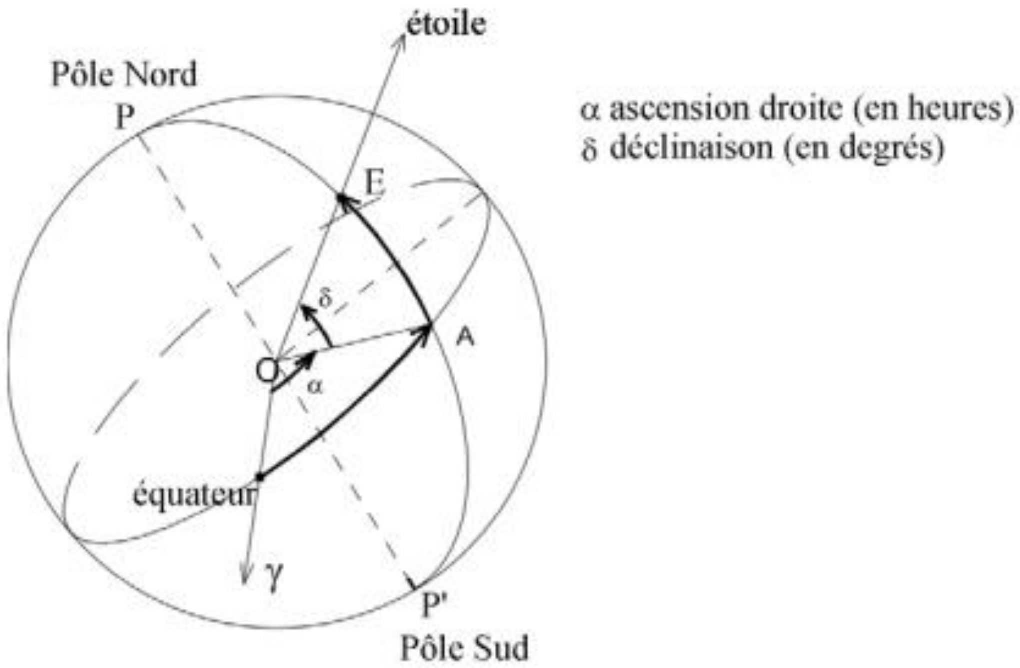
La mesure de cette longitude écliptique dans l'Antiquité est l'objet de notre exposé.

L'obliquité de l'écliptique ε vaut 23 ° 27 ' : c'est l'angle entre l'équateur céleste (prolongement sur la sphère céleste de l'équateur terrestre) et le plan de l'écliptique.

Tout se passe pour l'observateur terrestre comme si la sphère céleste représentée ci-dessus tournait autour de lui, la durée de cette rotation étant de 23 h 56 minutes 4secondes .

Les étoiles comme le point vernal sont entrainés dans ce mouvement apparent de la sphère céleste.

b) **Les coordonnées équatoriales**



La direction d'un astre est caractérisée par :

Son **ascension droite α**

et sa **déclinaison δ**

La déclinaison se mesure en degrés entre - 90° et 90° positive au dessus de l'équateur, négative en dessous.

L'ascension se mesure en heures minutes et secondes.

1 heure d'ascension droite vaut 15°.

Le demi grand cercle contenant la direction de l'étoile semble faire un tour en 23 h 56 min 4 s.

L'ascension droite se mesure dans le sens direct.

La déclinaison et l'ascension droites sont **invariables** en première approximation.

1) Précisions sur les sens de rotation réel de la terre et apparent des astres

Pour un observateur situé sur l'axe des pôles et regardant le pôle nord de la terre, la terre tourne autour de l'axe des pôles dans le sens direct.

Dans **l'hémisphère nord**, un observateur regardant vers le **sud** voit les astres se lever à l'est (à sa gauche) puis passer au méridien supérieur au sud et se coucher à l'ouest. Ces astres tournent dans le sens rétrograde(sens des aiguilles d'une montre).

L'observateur doit se tourner vers le sud pour voir le soleil décrire un arc de cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.

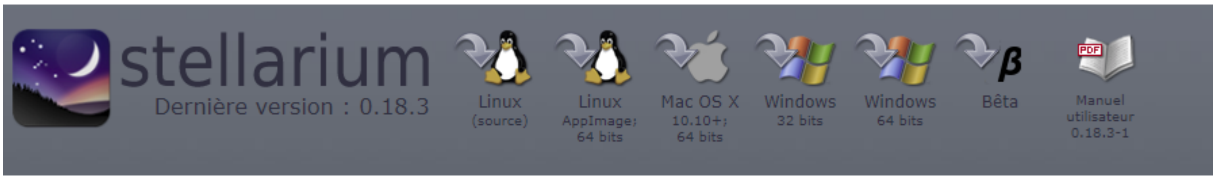
Si l'observateur se tourne vers le **nord**, il voit les étoiles circumpolaires tourner dans le sens direct autour du pôle nord.

Dans **l'hémisphère sud**, un observateur regardant vers le **nord** voit les astres se lever à l'est (à sa droite) puis passer au méridien supérieur au nord puis se coucher à l'ouest.

Si l'observateur observe le **sud**, il voit les étoiles circumpolaires tourner dans le sens rétrograde.

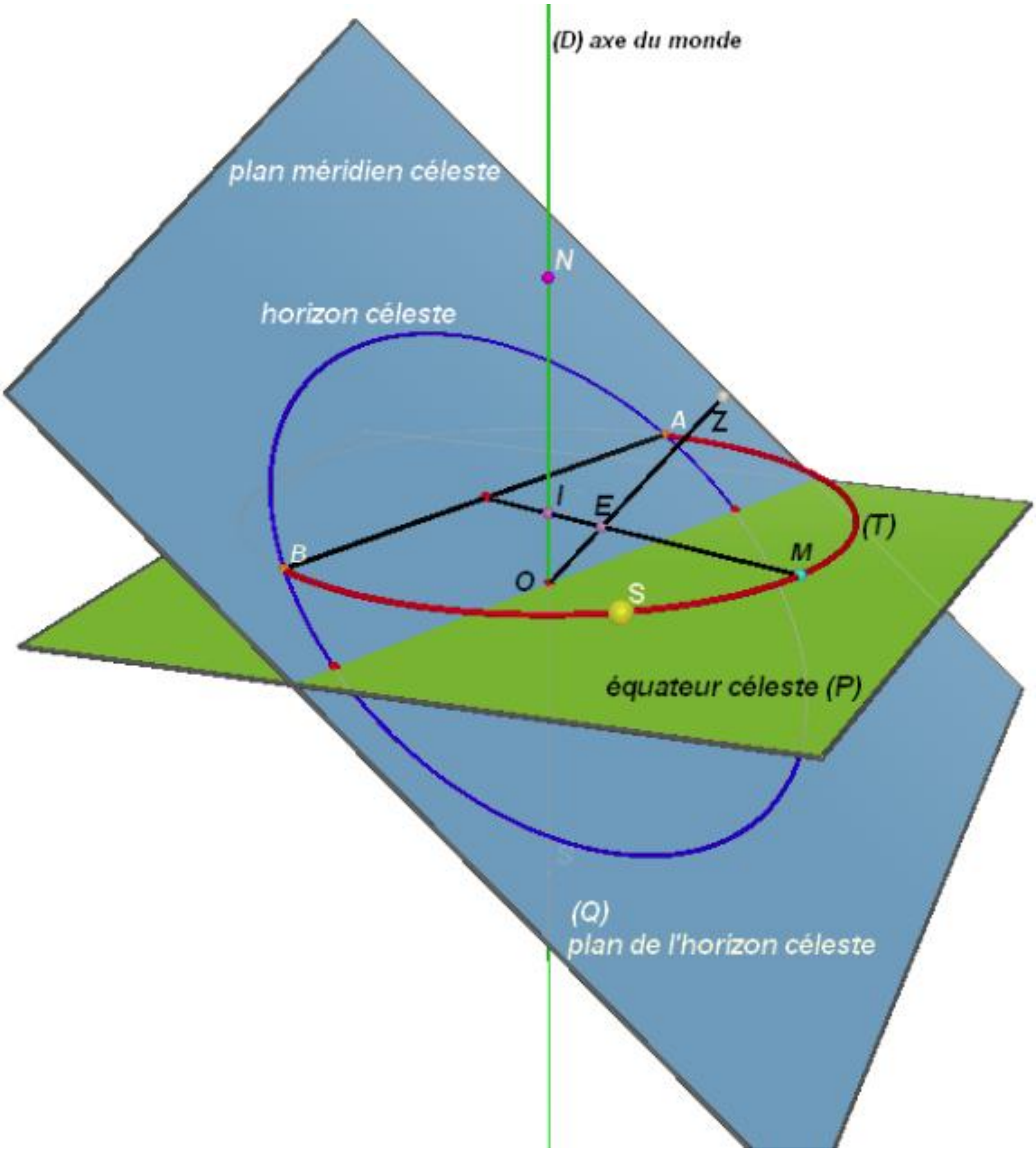
On pourra vérifier ces assertions en utilisant le logiciel stellariulum.

https://stellarium.org/fr/screenshots.html



2) Propriété liminaire

Propriété en vue d'établir la symétrie des arcs parcourus par le soleil sur la sphère céleste par rapport au plan méridien.



C le centre de la terre **O** l'observateur non visible sur ce schéma

Z le zénith c'est-à-dire le point d'intersection de (CO) avec la sphère céleste.

Le cercle rouge de centre I est la trajectoire apparente suivie par le soleil en 24 h. Le soleil est en effet pratiquement fixe sur la sphère céleste.

Comme toutes les étoiles, le soleil décrit un cercle du fait que sa déclinaison ne varie pratiquement pas.

Le cercle rouge **(T)** de **centre I** est l'intersection de la sphère céleste de centre O avec le plan **(R)** passant par S le soleil et parallèle à **(P)** plan de l'équateur céleste.

(Q) le plan passant par O et perpendiculaire à (CZ). C'est le plan de l'horizon céleste.

(D) l'axe du monde passant par les pôles célestes : c'est la droite parallèle à la droite passant par les pôles géographiques. Elle rencontre la sphère céleste locale de centre l'observateur O en deux points appelés pôle nord céleste et pôle sud céleste

A et **B** les intersections du cercle (T) avec le plan horizontal.

Appelons **E** le point d'intersection de (OZ) avec le plan **(R)**.

Montrons avec les données de la figure que (IE) est la médiatrice de [AB].

(AB) est la droite d'intersection des plans (Q) et (R).

(D) étant perpendiculaire à (P) est perpendiculaire à (R).

Donc (D) est perpendiculaire à (AB).

(OZ) est perpendiculaire à (Q) donc est perpendiculaire à (AB).

Appelons **(U)** le plan déterminé par les droites (D) et (OZ). **(U) est appelé plan méridien céleste.**

Appelons **M** le point d'intersection de la demi-droite [IE) avec le cercle (T).

(AB) perpendiculaire à 2 droites sécantes de (U). Elle est donc perpendiculaire au plan (U). On a IA =IB donc I appartient au plan médiateur de [AB].

Comme le plan (U) est perpendiculaire à [AB], c'est le plan médiateur de [AB].

(AB) est donc perpendiculaire à toute droite du plan (U) et en particulier à la droite (IE).

La droite (IE) est la médiatrice de [AB] puisque que IA = IB.

Autrement dit, les arcs $\overset{\frown}{MA}$ et $\overset{\frown}{MB}$ ont même longueur.

3) Les 2 projections

À présent nous allons utiliser deux types de projection, **l'une sur le plan du méridien, l'autre sur le plan équatorial.**

Ces projections nous permettront de traiter notre sujet par la trigonométrie plane au lieu d'utiliser la trigonométrie sphérique.

Avant de rentrer dans le détail de ces deux projections, montrons sur la sphère céleste les éléments importants comme l'écliptique, le cercle horizon, le zénith, le cercle équateur céleste, la trajectoire suivie par le soleil au solstice d'été en 24 h, lieu des points de la sphère céleste dont la déclinaison est 23° 26' ·

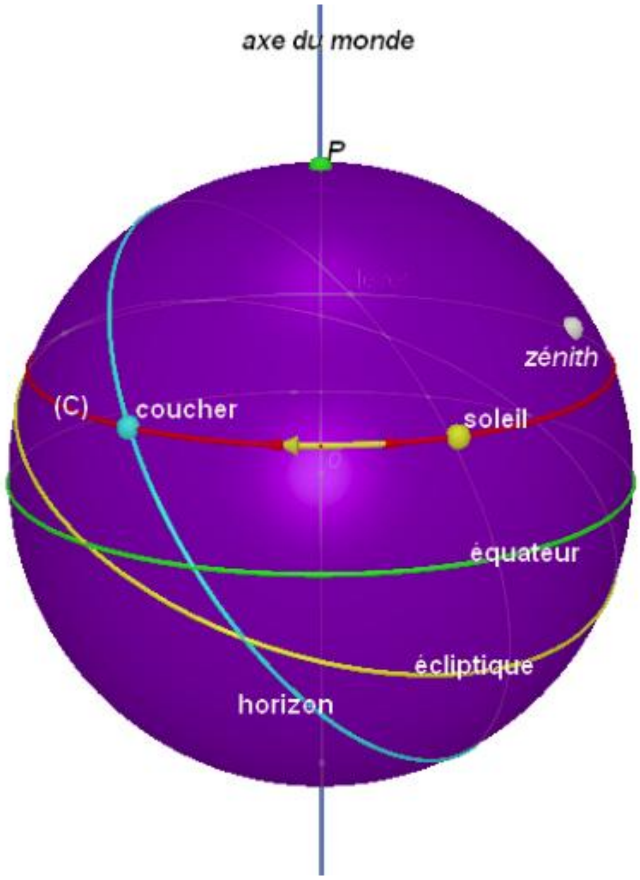


figure 1

Nous sommes dans l'hémisphère nord, le soleil se lève non à l'est mais autour de l'est (sauf aux équinoxes) et se couche non à l'ouest (sauf aux équinoxes) mais autour de l'ouest.

L'observateur, centre de la sphère céleste locale voit le soleil décrire un cercle (en rouge sur le schéma) dans le sens des aiguilles d'une montre(sens rétrograde).

Le soleil est en effet quasiment fixe sur la sphère céleste sur une durée de 24 h. Comme l'observateur ne sent pas le mouvement de la terre, il a l'impression que c'est l'astre qui se meut dans le ciel en décrivant ce cercle.

Attention : ce cercle n'est pas à confondre avec l'écliptique (en jaune sur le schéma) trajectoire du soleil sur la sphère céleste du fait du mouvement annuel de translation de la terre autour du soleil.

P est le pôle nord céleste.

Le plan de l’horizon terrestre passant par le centre O coupe la sphère céleste selon le cercle horizon en bleu.

Le cercle (C) en rouge situé dans un plan parallèle à l’équateur céleste est le lieu des points de latitude **23° 26′** .

C’est la **déclinaison maximale** du soleil au cours de son **périple sur l’écliptique**. **La déclinaison minimale est - 23° 26′** .

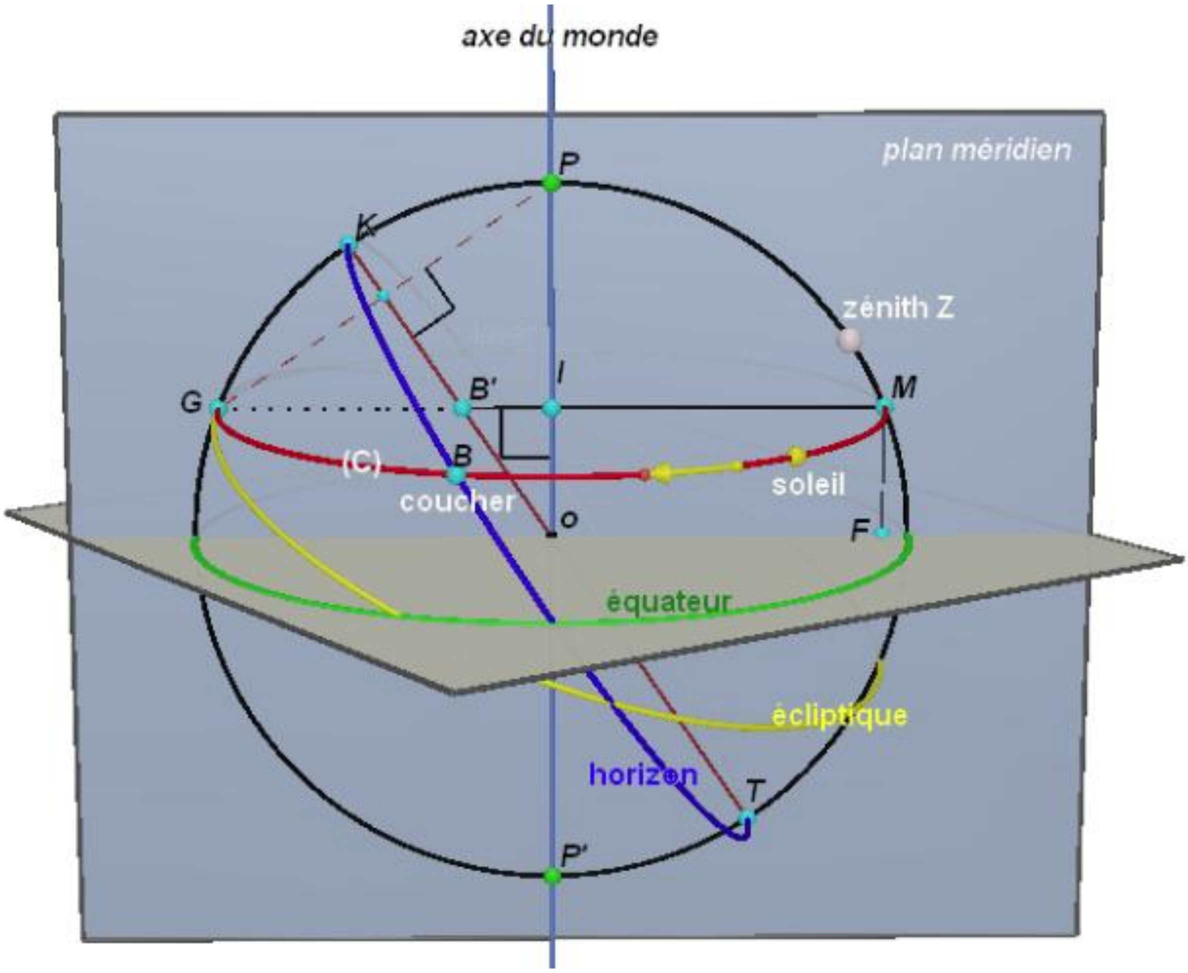
La déclinaison du soleil étant à peu prés constante en 24 h.

La terre tourne en sens contraire des aiguilles d’une montre en 24 h environ pour un observateur situé sur le pôle nord céleste et regardant l’équateur. En réalité cette durée est de **23 h 56 min 4 s**.

La trajectoire du soleil en 1 jour appelée trajectoire diurne va couper l’horizon céleste en deux points qui correspondent au lever et au coucher du soleil.
Ces deux points pouvant être **éventuellement confondus** ou même **ne pas exister.**

Nous allons procéder à une double projection, d’une part sur le plan méridien et d’autre part sur le plan équatorial.

a) Projection de la figure précédente sur le plan méridien



Le plan méridien passant par **les pôles et le zénith Z** est le plan en gris qui contient le cercle méridien de la sphère céleste.

La droite (KT) est la projection sur le plan méridien du cercle horizon de la sphère céleste.

Le cercle (C) est la trajectoire diurne du soleil contenue dans un plan parallèle à l'équateur. Comme nous avons choisi de nous intéresser pour chaque latitude au jour le plus long **tous les points de ce cercle ont pour déclinaison 23° 26′ .**

Nous montrerons en annexe que dans **l'hémisphère nord**, les durées de jour les plus longues correspondent au **solstice d'été** et que dans **l'hémisphère sud**, les durées de jour les plus longues correspondent au **solstice d'hiver.**

Cette trajectoire apparente du soleil rencontre le cercle horizon céleste en deux points B (coucher)et R (lever) dont le point B seul visible est projeté en B' sur le plan méridien.

La trajectoire apparente du soleil rencontre le plan méridien en M.

I est le centre de ce cercle (C), la droite (MI) est la médiatrice de [BR] d'après la propriété liminaire vue en A .

F est la projection de M sur le plan de l'équateur.

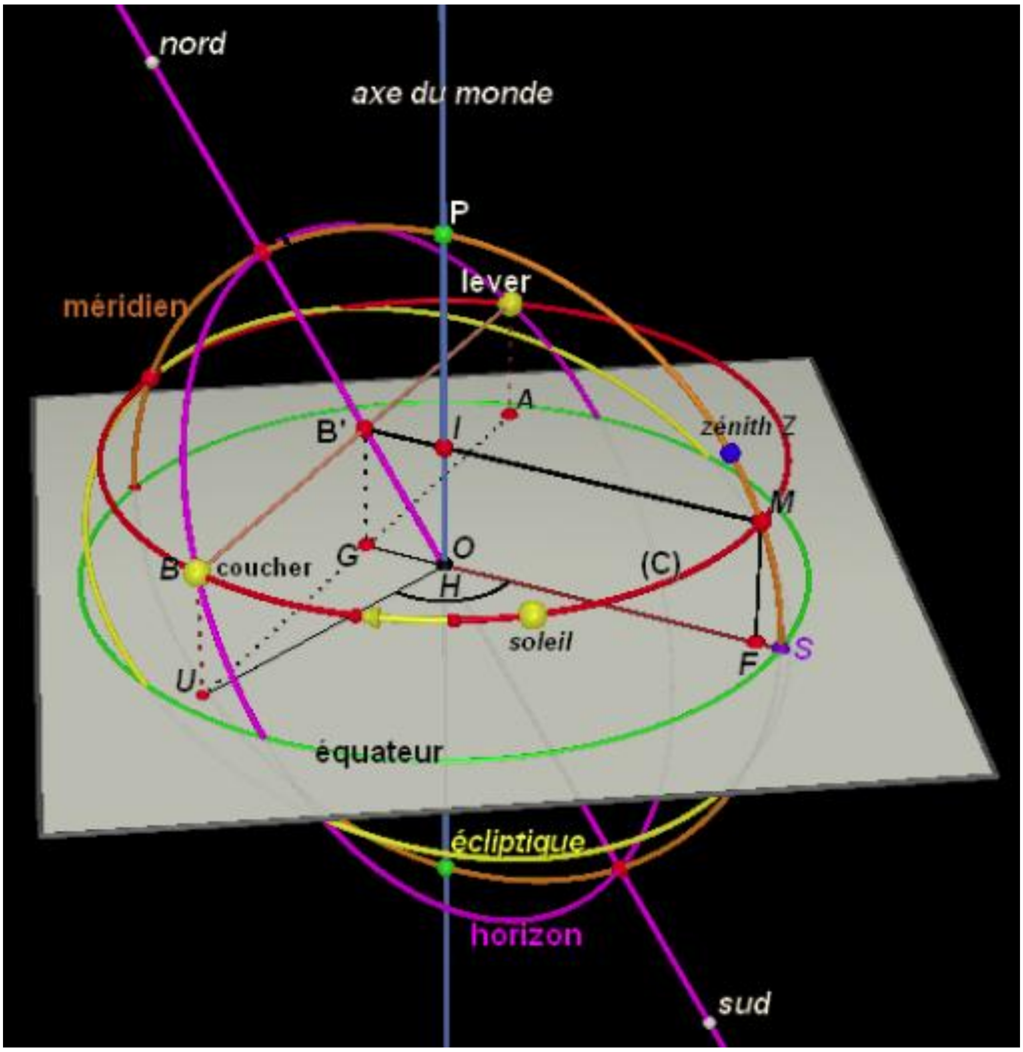
Puisque le point M de la sphère céleste a pour déclinaison 23° 26′ que l'on pose traditionnellement égal à ε, on a en choisissant = à 1 le rayon de la sphère céleste et en tenant compte de ce que les triangles IMO et MOF sont rectangles :

OF = cos ε   IO = sin ε

On pose B'I = x   et $\widehat{\mathrm{B'OI}} = \varphi$ **latitude du lieu d'observation qui est aussi la hauteur du pôle nord céleste par rapport à l'horizon céleste.**

x = tanφ sinε **(1)**   dans le triangle rectangle B'IO

b) Projection de la figure 1 sur le plan de l'équateur céleste :



Comment distinguer le lever du coucher ?

Compte tenu du sens de la progression du soleil sur (C) c'est-à-dire dans le sens rétrograde, il nous faut dire ce qu'est être au dessus de l'horizon céleste ou en dessous de l'horizon céleste.

L'horizon céleste partage la sphère céleste en deux demi espaces, lorsqu'un astre est dans celui qui contient le **zénith** alors cet astre est au dessus de l'horizon et au dessous dans le cas contraire.

H est l'angle horaire du soleil.

3) Formule de la durée du jour le plus long

On se réfère au schéma c.

B'I = GO=x Dans le triangle rectangle GOU, on a :

$\cos(\pi - H) = \dfrac{x}{\cos\varepsilon}$ donc $x = \cos\varepsilon \cos(\pi - H)$ **(2)**

or $\cos(\pi - H) = -\cos H$

(1) et (2) impliquent $\boxed{\cos H = -\tan\varphi \tan\varepsilon \quad (3)}$

C'est la formule donnant l'angle horaire de **l'arc semi-diurne.**

L'angle qui nous intéresse vaut **2 H**.

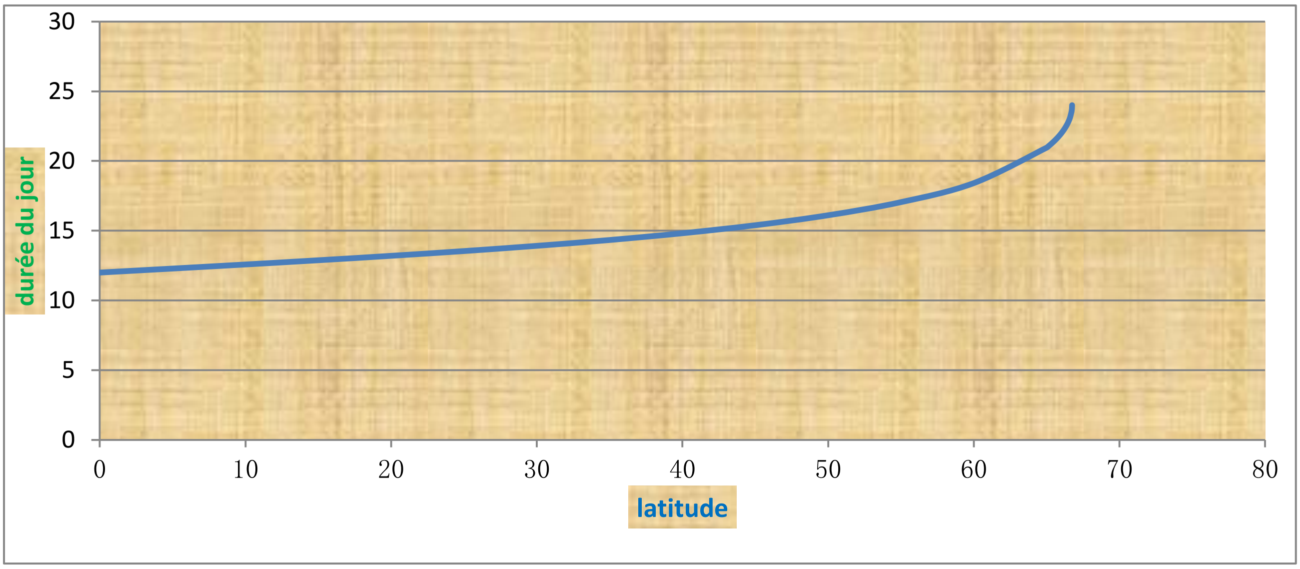
Nous allons convertir ces degrés en heure : le soleil accomplit sa trajectoire apparente en 24 h approximativement. Or 24 h correspondent à 360°.

2H en **degrés** correspondent à un temps en **heures** $\dfrac{2H}{15}$

D'où la durée du jour **le plus long** (en heures) dans **l'hémisphère nord** au **solstice d'été** :

$$\boxed{\frac{2\arccos(-\tan\varphi\ \tan\varepsilon)}{15}} \qquad \textbf{(4)}$$

Un simple calcul montre que la durée de 24 h est atteinte pour φ = 66,55° = 66° 33'



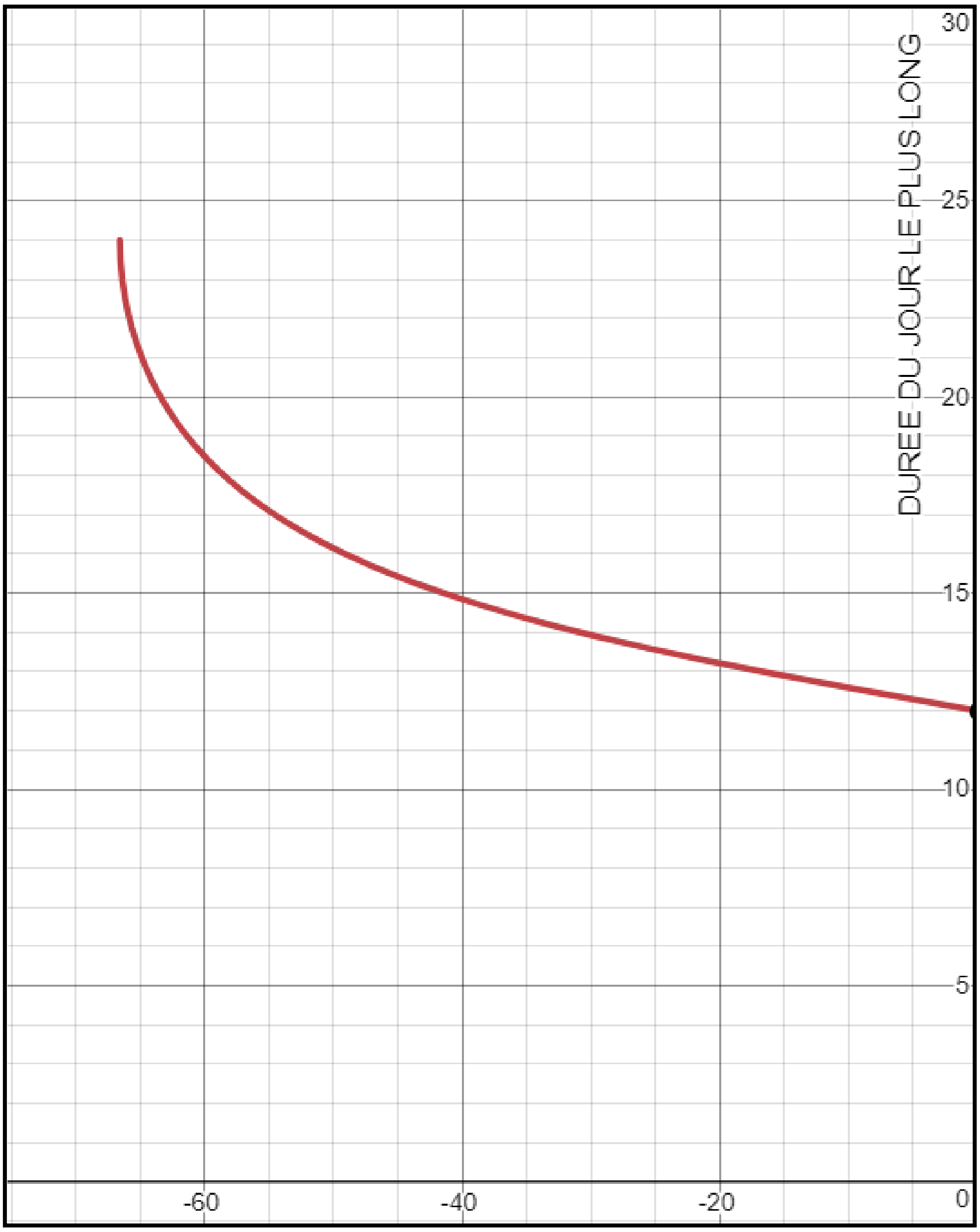
Ptolémée parvenait ainsi à connaître la latitude d'un lieu de l'hémisphère nord en connaissant la durée en ce lieu du jour le plus long.

D'où la durée du jour **le plus long** (en heures) dans **l'hémisphère sud** au **solstice d'hiver** : On remplace dans **(4)** **ε** par **- ε** .

$$\boxed{\frac{2\arccos(\tan\varphi\tan\varepsilon)}{15}} \qquad \textbf{(4 bis)}$$

Durée de 24 h atteinte pour φ =- 66,55° =- 66° 33’

D’où la durée du jour **le plus long** (en heures) dans **l’hémisphère sud** au **solstice d’hiver** :



LATITUDE

Pour une déclinaison autre que celle qui correspond au solstice d'été dans l'hémisphère nord, nous ferions le même raisonnement en remplaçant **ε** par **δ**.

La formule valable dans les 2 hémisphères est : $\cos H = - \tan \varphi \tan \delta$ **(4)**

H désignant l'angle horaire du soleil au lever ou au coucher

La durée du jour pour une latitude donnée dans l'hémisphère nord ou sud est :

$$\begin{cases} 2\,\dfrac{\mathrm{Acos}(-\tan\varphi\,\tan\delta)}{15} \\ -66°\,33' \leq \varphi \leq 66°\,33' \end{cases}$$

Exemple

A Paris le 19 février 2019

Déclinaison du soleil ≈ -11,2 ° (donnée sur stellarium)

Latitude de paris = 48 ° 50′

Soit environ 10 h 15 m.

La trigonométrie sphérique permet de démontrer très aisément la relation **(4)** établie si laborieusement par la trigonométrie plane. Nous aborderons ce point au **paragraphe 4**.

Inversement la relation **(3)** permet connaissant la durée d du **jour le plus long** en heures de déterminer la latitude dans l'hémisphère nord.

$$\boxed{\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{-\cos(7{,}5d)}{\tan \varepsilon} \right)} \qquad \textbf{(5)}$$

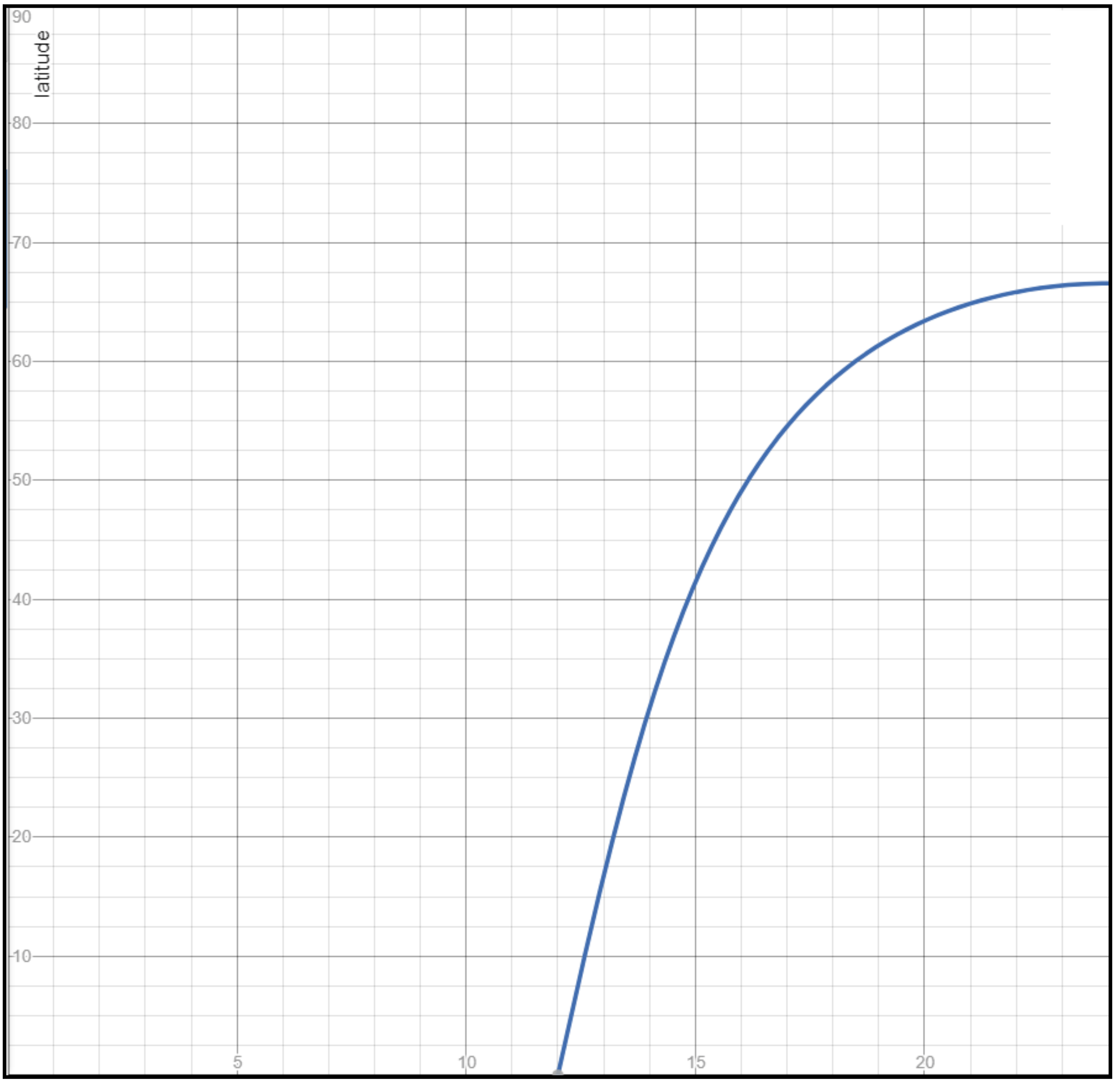
avec ε =23° 27'

Dans l'hémisphère sud, la formule devient en remplaçant **ε** par **-ε** :

$$\boxed{\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{\cos(7{,}5d)}{\tan \varepsilon} \right)} \qquad \textbf{(5 bis)}$$

HEMISPHERE NORD

Latitude en fonction de la durée du jour le plus long au solstice d'été

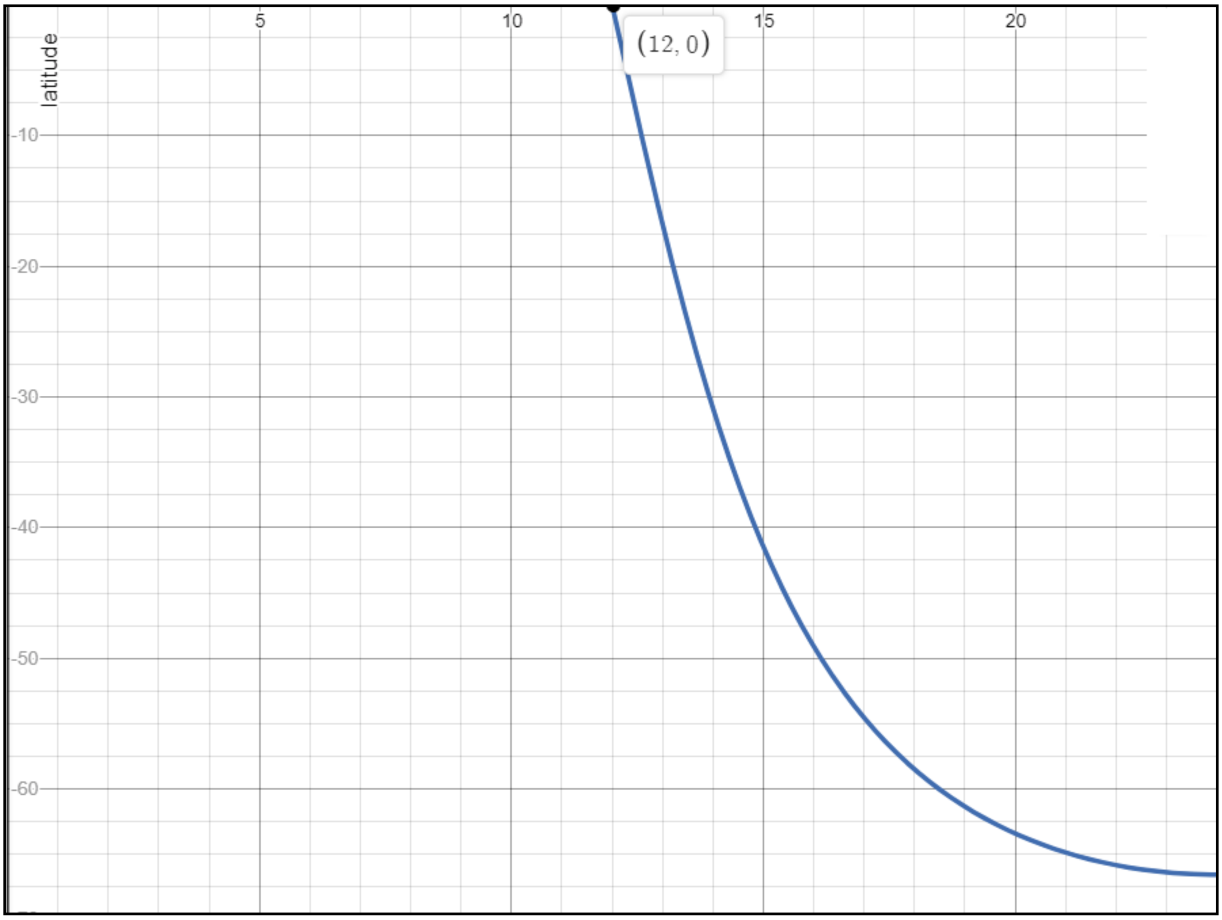


durée du jour le plus long

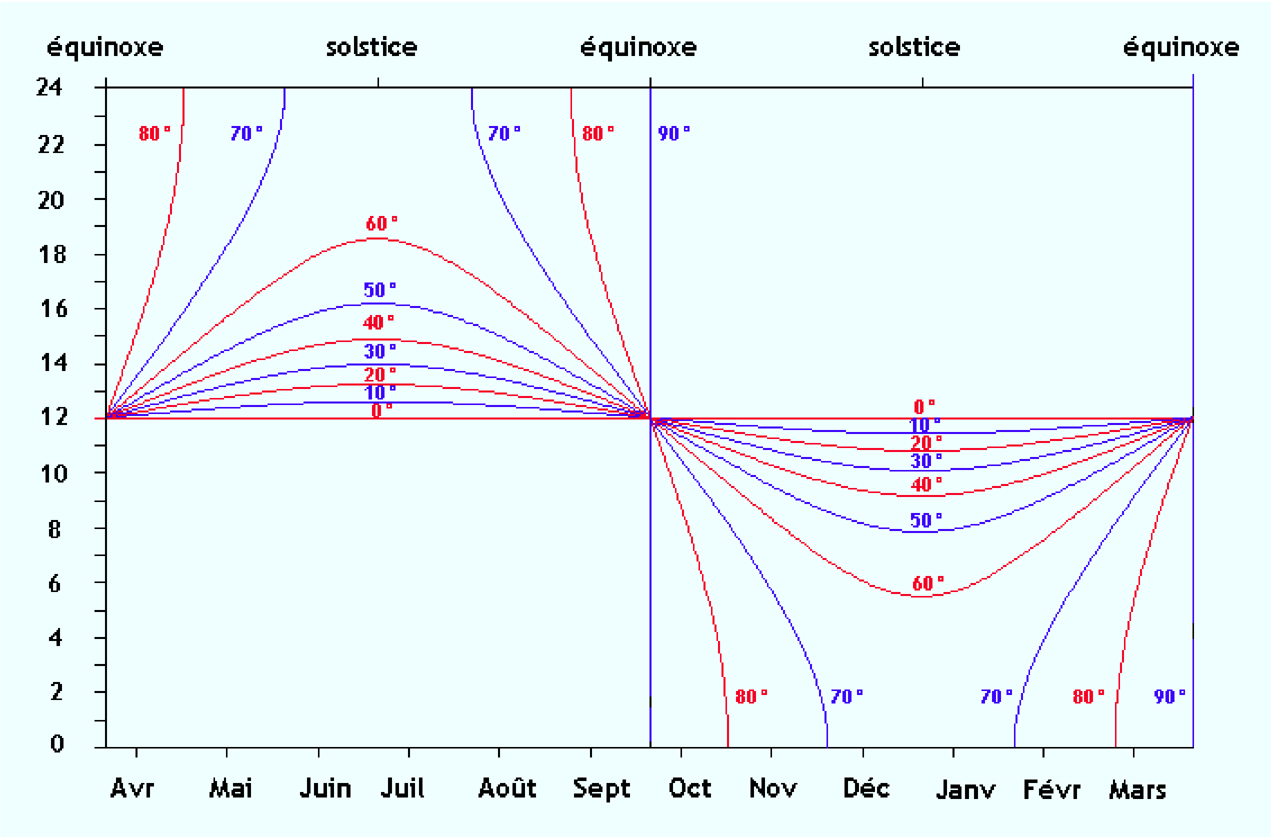
HEMISPHERE SUD

Latitude en fonction de la durée du jour le plus long au solstice d'hiver

Durée du jour le plus long



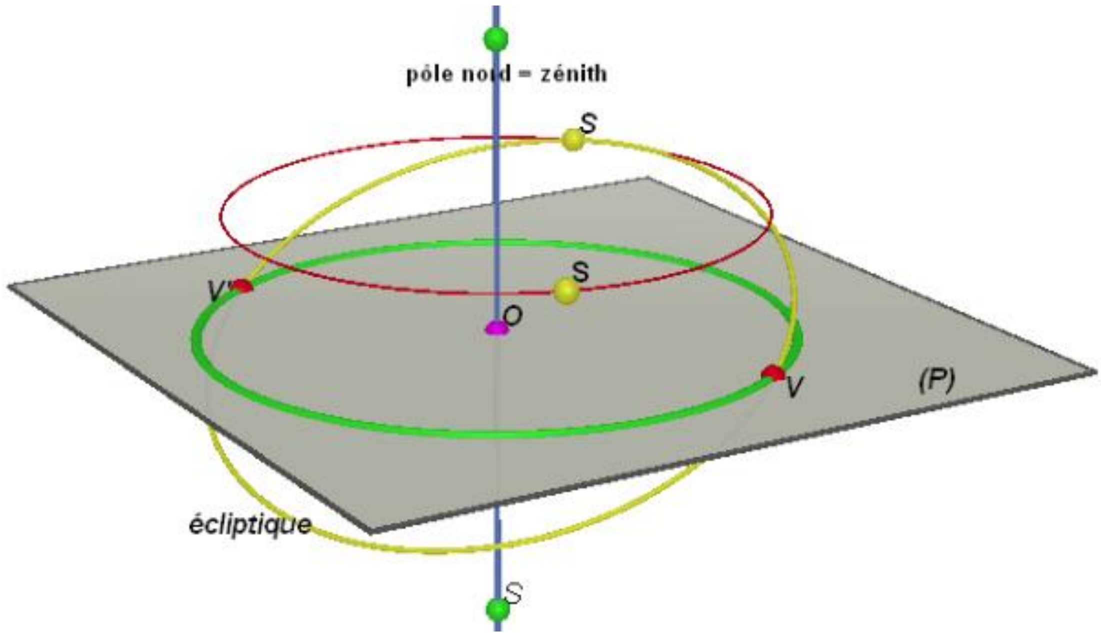
Variations de la durée du jour sur une année pour des latitudes de 0 à 90° .



https://xavier.hubaut.info/coursmath/var/jour.htm

Que se passe t-il en dehors de l'intervalle [-66,56° ; 66,56°] ?

Par exemple au **pôle nord**. Le zénith est confondu avec le pôle nord céleste et **le plan de l'équateur céleste (P) est confondu avec le plan de l'horizon céleste.**



V point vernal, un des deux points ou l'équateur céleste rencontre l'écliptique.

V' est l'autre point.

La longitude écliptique de V= 0°

La longitude écliptique de V' = 180°

S est une position particulière du soleil S sur l'écliptique et le cercle rouge est la trajectoire du soleil en 24 h approximativement sur la sphère céleste. Cette trajectoire est le cercle rouge du fait que la déclinaison su soleil est quasiment constante sur 24h.

Ce cercle rouge va rester parallèle au plan horizontal céleste sans jamais le toucher pendant 6 mois.

En effet, le soleil mettra environ 180 jours pour passer de la longitude 0° à ma longitude 180° (1° par jour environ).

Donc au pôle nord, il fait jour 6 mois de l'année et nuit 6 mois de l'année.

Pour faire une étude rigoureuse , nous aurons besoin des relations :

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin\lambda \quad (6) \qquad \cos H = -\tan\varphi \tan \delta \quad (4)$$

λ désignant la longitude écliptique du soleil

φ la latitude

ε l'obliquité de l'écliptique = 23° 26' = déclinaison maximale du soleil

δ déclinaison du soleil

Pour **(6)** consulter **:**
https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_defrepere/relation-ecliptique-equatoriale.html

D'autre part disons un mot sur les astres circumpolaires :

Définition : un astre est circumpolaire lorsqu'il reste toujours au dessus de l'horizon.

Nous admettrons alors la propriété suivante :

Propriété : un astre est circumpolaire si et seulement si :

$$|\delta| + |\varphi| > 90° \text{ et } \delta \times \varphi > 0$$

Application :

Supposons que nous soyons à 80° de latitude. Le soleil ne se couche pas si le lever et le coucher son confondus, c'est-à-dire si H=180°

D'où δ =Arctan(1/tan(80°)) =10° d'après cos H = **-** tanφ tanδ

Dans ce cas la longitude écliptique est solution dans [0° ;360°] de l'équation :

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda$$

La solution dans [-90° ;90°] est Arcsin[sin(10°)/sin(23°26')]≈ 25,89° ≈ 26°

Une autre solution est 180°- 26° = 154 °

Ce qui fait une différence environ de 128 °.

Montrons que pendant ces 128 jours **environ** le soleil ne se **couche pas**.

Souvenons nous que le 20 mars 2017 (printemps), **la longitude écliptique du soleil vaut 0°** car le soleil passe par le point vernal origine des longitudes écliptiques.

https://promenade.imcce.fr/fr/pages4/439.html

```
Printemps 20 mars 2017 à 10h28m UT
Eté...... 21 juin 2017 à 4h23m UT
Automne.. 22 septembre 2017 à 20h1m UT
Hiver.... 21 décembre 2017 à 16h27m UT
```

Rajoutons 26 jours à la date du 20 mars pour savoir quand le soleil aura pour longitude écliptique environ 26°.

Une application nous permet de le faire très aisément :

http://icalendrier.fr/outils/ajouter-retirer-date?startDate=2017-05-17&addOrSub=add&days=128&weeks=0&months=0&years=0

La date est alors le15 avril 2017.

A partir 15 avril 2017, rajoutons 128 jours, ce qui nous amène au 21 août 2017 environ.

Or 15 avril 2017 = jour n° 133 et 21 août 2017= jour n° 233.

Le graphique de la déclinaison montre qu'entre ces deux dates la déclinaison est strictement supérieure à 10°.

L'axe des x est paramétré de 1 à 365, x correspondant au numéro du jour de l'année dans le calendrier.

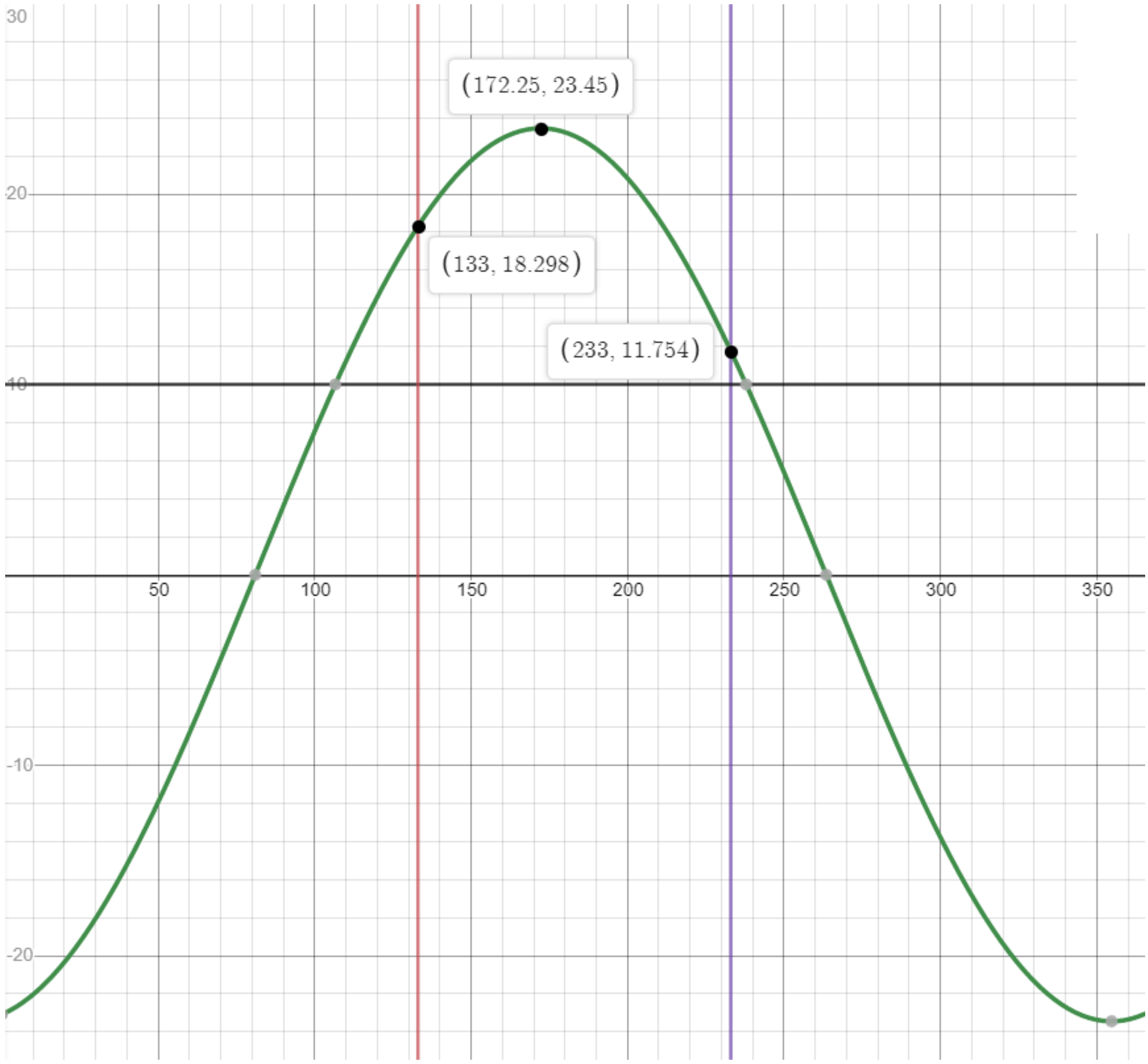


schéma i

La courbe en vert est celle de la déclinaison du soleil.

La courbe en rouge est x =133

La courbe en mauve est x = 233

La courbe en noir est y=10

Les conditions $|\boldsymbol{\delta}| + |\boldsymbol{\varphi}| > \mathbf{90°}$ **et** $\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\varphi} > \mathbf{0}$ sont donc vérifiées.

Le soleil est donc toujours entre ces 2 dates au dessus de l'horizon.

4) Lever et coucher d'un astre par la trigonométrie sphérique

(Pour les chevronnés de trigonométrie sphérique)

Nous allons retrouver la formule **3/(4)** du paragraphe **3** établie laborieusement à l'aide de la trigonométrie plane.

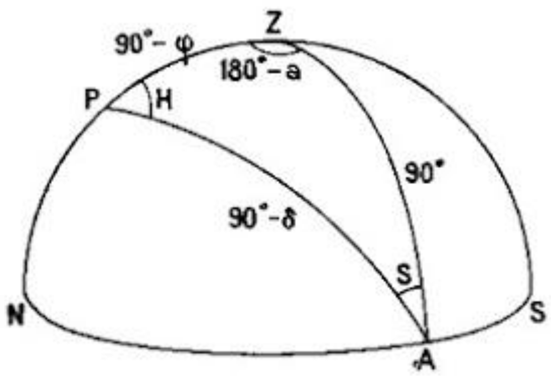


schéma j

Le soleil est alors sur le cercle horizon en A (schéma f).

Le triangle de position de l'astre qui se lève ou qui se couche est représenté sur le schéma f par le triangle sphérique APZ, qui est un triangle rectilatère.

Un triangle sphérique est dit rectilatère quand l'un de ses côtés est égal à 90 °.

C'est le cas du triangle APZ du schéma f, dont le côté ZA = 90°.

Des relations passage des coordonnées horaires aux coordonnées horizontales :

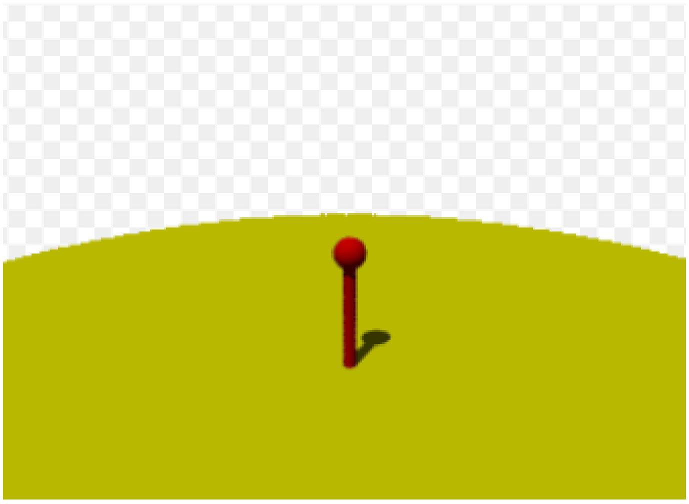
$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

S nous donnons à la distance zénithale de l'astre la valeur : z = 90° on a :

$$\cos H = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

La résolution de cette équation fournit les angles horaires du lever et du coucher.

5) Détermination de la latitude par le gnomon aux équinoxes



gnomon

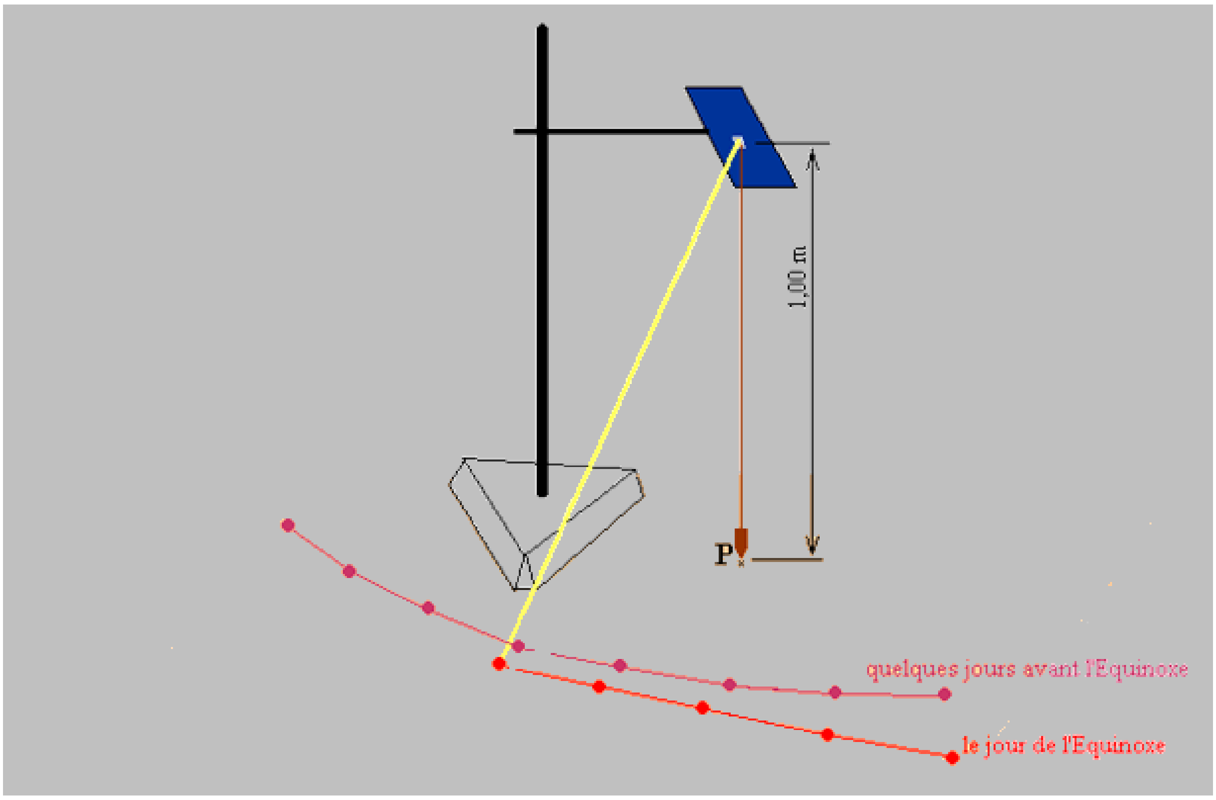
L'extrémité de l'ombre du bâton décrit sous nos latitudes une hyperbole.

Prenons le pied du bâton comme origine du repère orthonormé d'axe des y dirigé vers le nord et d'axe des x vers l'est. On démontre que l'équation de l'hyperbole mise sous la forme y=f(x) est :

$$y = \frac{-a\sin\varphi\cos\varphi + \sin\delta\sqrt{x^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\delta) + a^2\cos^2\delta}}{\sin^2\delta - \cos^2\varphi}$$

Avec φ latitude du lieu δ déclinaison du soleil a longueur du gnomon

Si δ =0 (équinoxe de printemps et d'automne) , on obtient y=a tanφ ce qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Montrons à présent comment déterminer la latitude à l'aide d'un gnomon au moment de l'équinoxe.

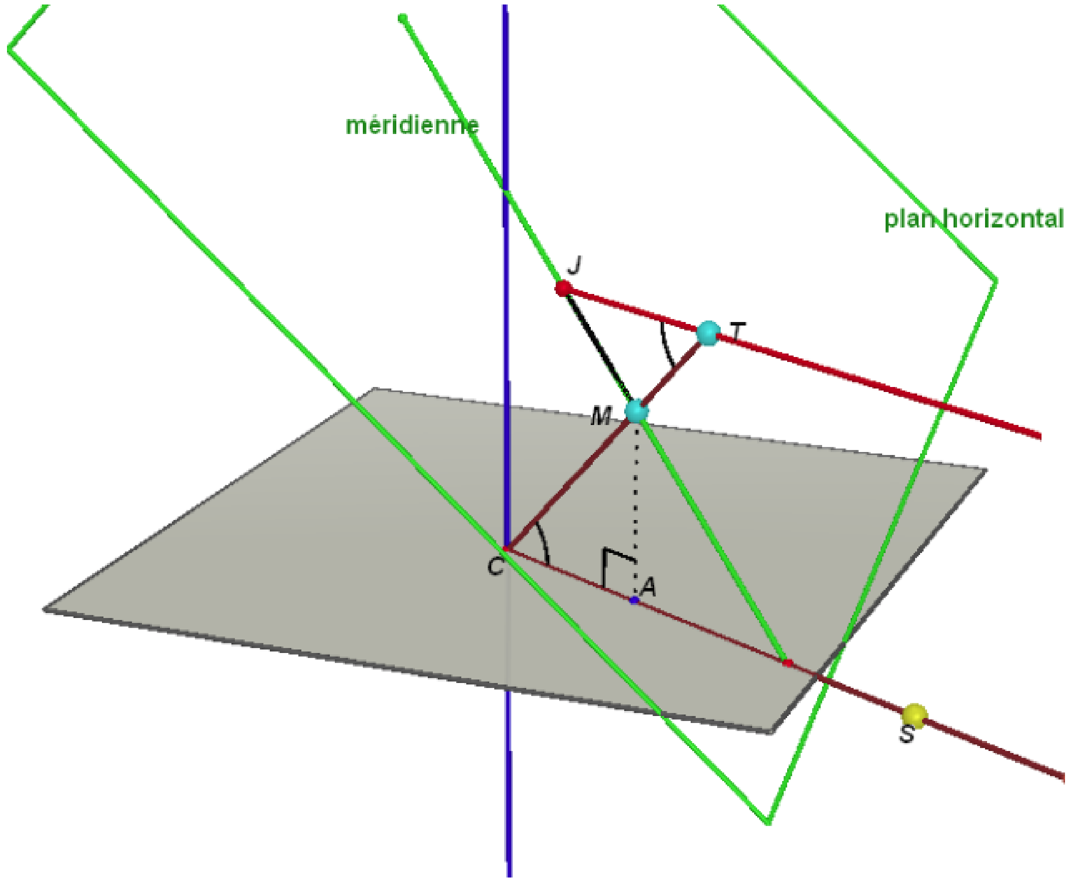


schéma I

Aux équinoxes, le soleil est dans le plan de l'équateur et donc tous les rayons solaires sont parallèles au plan de l'équateur à cause de la distance qui nous sépare du soleil. De plus on attend que le soleil soit dans le plan méridien.

Le gnomon est figuré par le segment [MT], M étant le lieu d'observation.

On attend que le soleil soit dans le **plan méridien au moment des équinoxes** où sa déclinaison vaut 0°.

L'ombre de l'obélisque est figurée par le segment **[MJ]**.

Le plan horizontal est figuré en vert.

La latitude est par définition $\widehat{MCA} = \widehat{JTM}$ angles alternes internes.

D'où en posant φ la latitude de M, on a : $\mathbf{\tan \varphi = \frac{JM}{MT}}$

Annexe

1) Nous allons montrer que dans **l'hémisphère nord**, les durées de jour les plus longues correspondent au **solstice d'été** et que dans **l'hémisphère sud**, les durées de jour les plus longues correspondent au **solstice d'hiver.**

Démonstration pour l'hémisphère nord (pour l'hémisphère sud, on reprendra la démonstration mutatis mutandis.)

Soit pour une latitude φ la durée du jour 2H (relire le **paragraphe 3**) au solstice d'été dans l'hémisphère nord.

Soit pour une latitude φ la durée du jour 2H' pour une déclinaison du soleil δ

telle que $\delta < \varepsilon$ ε étant la déclinaison maximale du soleil.

Nous allons montrer que H' < H et donc que 2H' < 2H

D'après **(3)** du **paragraphe 3** **cos H = - tanφ tanε**

D'où : *cos H = - tanφ tan ε* *et* *cos H' = - tanφ tan δ*

$\Rightarrow$ cos H $<$ cos H' or la fonction définie par f(x) = cosx est décroissante sur $[0\,;\pi] \Rightarrow$ H > H'

2) Des sites utiles

Lever et coucher d'un astre

https://promenade.imcce.fr/fr/pages3/367.html

Lever et coucher des étoiles. Lever héliaque

https://promenade.imcce.fr/fr/pages6/725.html

Lever et coucher du soleil et des planètes en tout lieu

https://promenade.imcce.fr/fr/pages5/585.html

Dates des saisons

https://promenade.imcce.fr/fr/pages4/439.html