LA TRAVERSÉE D'UN RÉGIMENT DANS UN BATELET.

Une compagnie d'infanterie s'avance sur le bord d'un fleuve; mais le pont est brisé, la rivière est profonde. Le capitaine aperçoit, sur le bord, deux enfants qui jouent dans un petit canot; ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter plus d'un soldat. Comment s'y prendra le capitaine pour faire passer le fleuve aux soldats de sa compagnie?

Les deux enfants traversent la rivière; l'un d'eux reste sur la seconde rive, et l'autre ramène le bateau. Puis l'un des soldats traverse la rivière, et l'enfant passé ramène le bateau.

Par cette tactique, de deux allers et de deux retours, un soldat passe. On la recommencera autant de fois qu'il y a d'hommes dans la compagnie, en y comprenant le capitaine et ses lieutenants.

LA TRAVERSÉE DU BATELIER.

Sur le bord d'une rivière se trouvent un loup, une chèvre et un chou; il n'y a qu'un bateau si petit, que le batelier seul et l'un d'eux peuvent y tenir. Il est question de les passer tous trois, de telle sorte que le loup ne mange pas la chèvre, ni la chèvre le chou, pendant l'absence du batelier.

Le batelier commencera par passer la chèvre; puis il retournera prendre le loup; quand il aura passé le loup, il ramènera la chèvre, qu'il laissera sur la première rive pour passer le chou du côté du loup. Enfin il retournera prendre la chèvre, et la passera. Par ce moyen, le loup ne se trouvera donc avec la chèvre, ni la chèvre avec le chou, qu'en présence du batelier.

LA TRAVERSÉE DES TROIS MÉNAGES.

Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière, et rencontrent un bateau sans batelier; ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter plus de deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.

La solution de ce problème antique est contenue dans les vers latins que voici :

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem
Advehit: ad propriam sive maritus abit.

En d'autres termes, désignons les maris jaloux par les grandes lettres A, B, C, et leurs femmes respectives par les petites lettres correspondantes *a, b, c*; on a, au départ,

Première rive.			*Deuxième rive.*		
C	B	A	.	.	.
c	*b*	*a*	.	.	.

On opérera de la manière suivante, en observant qu'après chaque voyage le bateau est amarré à la seconde rive.

I. — Deux femmes passent d'abord :

C	B	A	.	.	.
c	.	.	.	*b*	*a*

II. — Une femme revient et emmène la troisième :

C	B	A	.	.	.
.	.	.	*c*	*b*	*a*

III. — Une femme revient, reste avec son mari, et les deux autres maris passent :

C	.	.	.	B	A
c	.	.	.	*b*	*a*

IV. — Un mari revient avec sa femme qu'il laisse, et emmène l'autre mari :

.	.	.	C	B	A
c	*b*	.	.	.	*a*

V. — La femme passée revient chercher l'une des deux autres :

.	.	.	C	B	A
c	.	.	.	*b*	*a*

VI. — Une femme (ou le mari) revient chercher la dernière :

.	.	.	C	B	A
.	.	.	*c*	*b*	*a*

Au moyen de la réalisation du jeu par des cartes ou des jetons, il sera facile de comprendre le raisonnement de Bachet, que nous reproduisons ci-dessous : « Il semble que cette question ne soit fondée en aucune raison; mais toutefois la condition apposée qu'il ne faut point qu'aucune femme demeure accompagnée d'aucun des hommes si son mari n'est présent, nous peut guider pour trouver la solution d'icelle par un discours infaillible. Car il est certain que pour passer deux à deux, il faut ou que deux hommes passent ensemble ou deux femmes, ou un homme avec sa femme. Or, *au premier passage*, on ne peut faire passer deux hommes (car alors un homme seul demeurerait avec les trois femmes, contre la condition); donc il est nécessaire que deux femmes passent, ou qu'il passe un homme avec sa femme; mais ces deux façons reviennent à une, d'autant que si deux femmes passent, il faut que l'une ramène le bateau; partant une seule se treuve en l'autre rive; et si un homme passe avec sa femme, le même adviendra, d'autant que l'homme doit ramener le bateau (car si la femme le ramenait, elle se treuverait avec les deux autres hommes sans son mari).

« *Au second passage*, deux hommes ne peuvent passer, car l'un deux lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme; un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car, étant passé, il se treuverait seul avec deux femmes); il est donc nécessaire que les deux femmes passent: ainsi les trois femmes étant passées, il faut que l'une d'icelles ramène le bateau. Quoi fait, *au troisième passage*, où restent à passer les trois hommes et une femme, on voit bien que deux femmes ne peuvent passer, puisqu'il n'y en a qu'une; un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car étant passé il se treuverait seul avec les trois femmes); donc, il faut que deux hommes passent et allent vers leurs deux femmes, laissant l'autre avec la sienne. Or, qui ramènera le bateau?

« Un homme ne peut le faire (car il lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme); une femme *(ou deux femmes)* [1] ne

[1] Les mots en italique ne sont pas dans Bachet; c'est un oubli.

peut aussi (car elle irait vers un autre homme en laissant son mari); que si les deux hommes le ramenaient, ce serait ne rien faire, car ils retourneraient là d'où ils sont venus. Partant, ne restant autre moyen, il faut qu'un homme avec sa femme ramène le bateau.

« *Au quatrième passage,* où restent à passer deux hommes avec leurs deux femmes, il est certain qu'un homme avec sa femme ne doit passer (car ce serait ne rien faire); les deux femmes aussi ne peuvent passer (car alors les trois femmes seraient avec un seul homme); donc il faut que les deux hommes passent. Alors pour ramener le bateau, deux hommes ne peuvent être employés (car ce serait retourner là d'où ils sont venus); un homme seul aussi ne peut (car, cela fait, il se treuverait seul avec deux femmes); donc il faut que ce soit la femme qui, en deux fois, aille quérir les deux autres femmes qui restent à passer, et voilà le *cinquième* et le *sixième* passage. Partant, en six fois, ils sont tous passés sans enfreindre la condition [1]. »

Le raisonnement qui précède nous montre que le problème proposé ne comporte qu'une seule solution en six passages, au plus.

L'ERREUR DE TARTAGLIA

Tartaglia, illustre mathématicien italien, naquit à Brescia vers 1510, et mourut en 1557. Il a donné, avant Pascal, la

[1] BACHET, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les Nombres*. Quatrième édition, revue, simplifiée et augmentée par A. LABOSNE. Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1879, p. 148-150.

théorie du triangle arithmétique, et avant Cardan, la résolution de l'équation du troisième degré. Dans son *Traité d'Arithmétique*, il s'est proposé de résoudre le problème pour quatre ménages, en conservant les conditions de l'énoncé précédent; mais ce grand savant s'est trompé. Bachet, qui le fait remarquer, a reconnu que la chose est impossible, mais sans donner de démonstration.

Voici comment on peut démontrer l'impossibilité de ce problème, lorsqu'on ne peut faire passer plus de deux personnes à la fois. On observera d'abord que d'un passage au suivant le nombre des personnes passées, s'il augmente, ne peut augmenter que d'une unité. Par conséquent, supposons qu'on ait fait passer deux, puis trois, puis quatre personnes avec les conditions imposées, et voyons si l'on pourra faire passer cinq personnes. Ces cinq personnes peuvent être passées de l'une des quatre façons suivantes :

4 femmes.	3 femmes.	2 femmes.	1 femme.
1 homme.	2 hommes.	3 hommes.	4 hommes.

Mais les deux premiers cas sont impossibles, d'après l'énoncé, puisque sur la seconde rive les femmes seraient en majorité, et, par suite, il y aurait quelque femme qui se trouverait avec un homme sans son mari; de même, le troisième cas est impossible, puisque sur la première rive les femmes seraient encore en majorité sur les hommes présents.

Quant au dernier cas, s'il peut avoir lieu, c'est que le dernier passage a amené deux hommes, ou un homme et une femme. Or il n'a pu amener deux hommes, car alors il y aurait eu sur la première rive deux hommes et trois femmes, ce qui est impossible comme dans le second cas; il n'a pu amener non plus un homme et une femme, car il y aurait eu sur la première rive un homme et quatre femmes, ce qui est impossible comme dans le premier cas.

Donc on ne peut faire passer cinq personnes, par suite des exigences de l'énoncé du problème.

LA TRAVERSÉE DE QUATRE MÉNAGES.

Cependant le problème de la traversée de quatre ménages peut être effectué, si le bateau peut contenir jusqu'à trois personnes, en conservant les autres conditions imposées, ainsi que l'a démontré M. Labosne.

Désignons les maris ou les rois des quatre couleurs du jeu de cartes par les grandes lettres A, B, C, D, et les femmes ou les reines respectives, par les petites lettres correspondantes *a*, *b*, *c*, *d*; on a, au départ,

Première rive.				*Deuxième rive.*			
D	C	B	A	.	.	.	.
d	*c*	*b*	*a*	.	.	.	.

En admettant que le bateau puisse contenir jusqu'à trois personnes, on opérera conformément au tableau suivant :

I. — Trois reines passent d'abord :

D	C	B	A	.	.	.	.
d	.	.	.	.	*c*	*b*	*a*

II. — Une reine (ou deux) revient et emmène la quatrième :

D	C	B	A	|	.	.	.	.
.	.	.	.	|	*d*	*c*	*b*	*a*

III. — Une reine revient, reste avec son mari; les trois autres rois passent :

D	.	.	.	|	.	C	B	A
d	.	.	.	|	.	*c*	*b*	*a*

IV. — Un roi revient avec sa femme et emmène l'autre roi :

.	.	.	.	|	D	C	B	A
d	.	.	.	|	.	*c*	*b*	*a*

V. — Enfin le dernier des rois revient chercher sa femme :

.	.	.	.	|	D	C	B	A
.	.	.	.	|	*d*	*c*	*b*	*a*

PROBLÈME GÉNÉRAL DES TRAVERSÉES.

En suivant la même voie, on généralise le problème précédent que l'on peut énoncer ainsi :

Des maris en nombre quelconque n se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière et aperçoivent un bateau sans batelier; ce bateau ne peut porter plus de $(n - 1)$ *personnes. On demande comment ces* $2n$ *personnes passeront, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un autre homme, ou de plusieurs autres, si son mari n'est présent.*

Pour la solution de ce problème, nous supposerons qu'il y a plus de quatre ménages ; nous désignerons

les maris par les lettres   M L —— B A,
et leurs femmes par   *m l* —— *b a*.

Les deux traits horizontaux représentent un ou plusieurs ménages, en nombre quelconque.

On a, au départ :

Première rive.	*Deuxième rive.*
M L — B A	. . . .
m l — *b a*	. . . .

On opérera conformément au tableau suivant :

I. — D'abord $(n-1)$ femmes passent :

M L — B A	. . . .
m	. *l* — *b a*

II. — Une femme revient chercher la dernière :

M L — B A	. . . .
. . . .	*m l* — *b a*

III. — Une femme revient, reste avec son mari, et les autres maris passent :

M	. L — B A
m	. *l* — *b a*

IV. — Un couple repasse la rivière et ramène le couple restant :

. . . .	M L — B A
. . . .	*m l* — *b a*.

La traversée est effectuée en quatre voyages, tandis que pour quatre ménages il en faut cinq; dans ce cas, le dernier voyage se dédouble, puisqu'il reste quatre personnes sur la première rive, après le troisième passage.

AUTRE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME.

L'énoncé général qui précède a été proposé par M. Labosne, qui a donné une solution de ce problème dans son édition des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac. Mais la solution que nous venons d'exposer est beaucoup plus simple que celle de l'éditeur.

D'ailleurs, nous observerons ici que cette généralisation ne nous semble pas complète; elle ne concorde pas entièrement avec l'idée renfermée dans l'énoncé du problème des trois maris jaloux. D'après le tableau précédent, on voit que l'on peut faire passer neuf ménages avec un bateau contenant huit personnes au plus. Cependant il est facile de voir que cette traversée peut être effectuée avec un bateau contenant deux personnes de moins, c'est-à-dire contenant six personnes au plus. En effet, dans la solution du problème des trois ménages, chacun d'eux peut être considéré comme triple, et la traversée pourra s'effectuer conformément au premier tableau que nous avons donné, en y supposant que A*a*, B*b*, C*c* représentent des triples ménages.

En conséquence, l'énoncé général du problème des traversées de *n* ménages est le suivant :

Des maris en nombre quelconque n se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière; quel doit être le plus petit nombre x de personnes qu'un bateau peut au plus contenir, pour effectuer la traversée, sans batelier, avec la condition qu'aucune femme ne demeure dans le bateau ou sur l'une des rives en compagnie d'un ou de plusieurs hommes, si son mari n'est présent.

Nous donnerons la solution de ce problème dans la note I. placée à la fin du volume.

LA STATION DANS UNE ILE.

Nous ajouterons, pour terminer cette récréation, qu'il y a une autre manière de généraliser le problème des maris jaloux par une méthode très simple et très ingénieuse, dont l'idée nous a été suggérée au Congrès de l'*Association française pour l'avancement des sciences*, à Montpellier, en 1879, par un jeune élève du lycée de cette ville, M. Cadet de Fontenay. En effet, il suffit de supposer que, dans la traversée du fleuve, on peut s'arrêter dans une île; dans ce cas, en conservant toutes les autres conditions du premier problème, on peut effectuer avec un bateau, contenant deux personnes au plus, la traversée d'un nombre quelconque de ménages. En d'autres termes, nous donnerons la solution complète du problème suivant :

Des maris, en nombre quelconque, se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière; ils rencontrent un bateau si *petit, qu'il ne peut porter plus de deux personnes. De plus, la rivière renferme une île sur laquelle on peut s'arrêter. On demande comment toutes ces personnes passeront la rivière, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure, soit sur les deux rives, dans le bateau ou dans l'île, en la compagnie d'un ou de plusieurs hommes, si son mari n'est présent.*

Nous supposerons d'abord que le nombre des maris est au moins égal à quatre. La traversée se composera toujours de trois phases distinctes.

PHASE DE DÉPART. — Dans cette première partie, il s'agit de faire passer un ménage sur la seconde rive, et un autre dans l'île ; on arrive à ce résultat par *cinq* voyages ; après chacun d'eux, le bateau est amarré dans l'île.

Les deux traits horizontaux représentent encore un ou plusieurs ménages.

Première rive.					*Ile.*				*Deuxième rive.*			

I. — Deux femmes passent dans l'île :

—	D	C	B	A	.	.	.	.	.	.	.	.
—	*d*	*c*	.	.	.	.	*b*	*a*	.	.	.	.

II. — L'une d'elles revient chercher la troisième :

—	D	C	B	A	.	.	.	.	.	.	.	.
—	*d*	.	.	.	.	*c*	*b*	*a*	.	.	.	.

III. — Une femme revient, reste avec son mari, et deux maris rejoignent leurs femmes :

—	D	C	.	.	.	.	B	A	.	.	.	.
—	*d*	*c*	.	.	.	.	*b*	*a*	.	.	.	.

IV. — Les femmes de l'île passent sur la deuxième rive, et l'une d'elles revient dans l'île :

——	D	C	.	.	.	.	B	A	.	.	.	.
——	*d*	*c*	.	.	.	.	*b*	.	.	.	.	*a*

V. — Les hommes de l'île traversent le second bras, et l'un d'eux revient dans l'île avec sa femme :

——	D	C	.	.	.	.	B	.	.	.	.	A
——	*d*	*c*	.	.	.	.	*b*	.	.	.	.	*a*

Phase intermédiaire. — Il s'agit : 1° d'aller chercher un couple sur la première rive pour l'amener dans l'île ; 2° de faire passer un couple de l'île sur la seconde rive, le bateau restant toujours amarré dans l'île après chaque voyage ; cette phase comprend *quatre* voyages.

I. — L'homme de l'île revient sur la première rive et deux femmes rejoignent l'île :

——	D	C	B	.	.	.	.	.	.	.	.	A
——	.		.	.	*d*	*c*	*b*	.	.	.	.	*a*

II. — Une femme revient, reste avec son mari, et les deux autres rejoignent leurs femmes dans l'île :

——	D	.	.	.	.	C	B	.	.	.	.	A
——	*d*	.	.	.	.	*c*	*b*	.	.	.	.	*a*

III. — Les deux maris traversent le second bras, et la femme revient dans l'île :

——	D	.	.	.	.	.	.	.	.	C	B	A
——	*d*	.	.	.	.	*c*	*b*	*a*	.	.	.	.

IV. — Deux femmes de l'île traversent le second bras, et le mari C revient dans l'île :

— D . . .	. C . .	. . B A
— *d* . . .	. *c* . .	. . *b* *a*

On répètera cette phase intermédiaire jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul ménage sur la première rive.

Dernière phase. — Il s'agit de faire passer sur la deuxième rive le ménage resté sur la première, et celui qui est resté dans l'île. Il faut *trois* voyages, le dernier étant compté pour un seul.

I. — L'homme de l'île revient chercher le dernier mari :

. . . .	D C . .	. . B A —
d . . .	. *c* . .	. . *b* *a* —

II. — Les hommes de l'île passent sur la seconde rive, et une femme revient dans l'île :

. . . .	. . . . .	D C B A —
d . . .	. *c* *b* .	. . . *a* —

III. — Les femmes de l'île passent le second bras, et l'une d'elles revient chercher la dernière femme :

. . . .	. . . . .	D C B A —
. . . .	. . . . .	*d* *c* *b* *a* —

Donc, s'il n'y a que quatre ménages, la traversée s'effectue en douze passages; et s'il y a n ménages, elle peut s'effectuer en un nombre de voyages au plus égal à $4(n-1)$.