

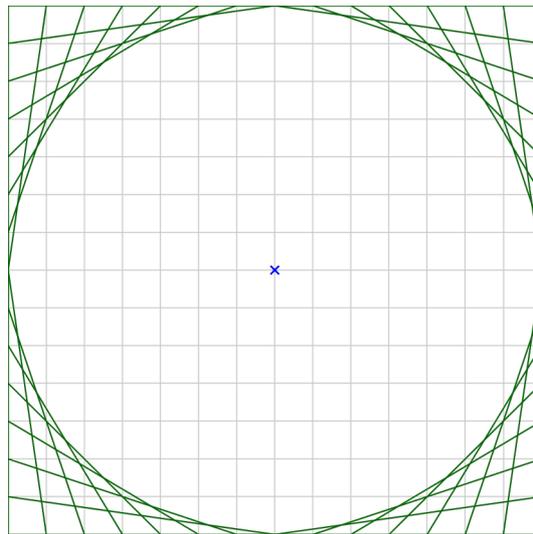
# Non, ce n'est pas un cercle !

Zoltán Kovács

The Private University College of Education of the Diocese of Linz

Salesianumweg 3, A-4020 Linz, Austria

zoltan@geogebra.org



**Résumé :** Une telle courbe, présentée dans des manuels scolaires, semble être un cercle. Mais c'est en fait une courbe différente. Cet article traite de certaines approches élémentaires pour cataloguer l'objet géométrique, y compris les nouvelles technologies en utilisant GeoGebra. Nous argumentons de deux manières pour réfuter cette impression erronée, puis via deux suggestions nous établissons une conjecture correcte, qui va être confirmée, démontrée de façon rigoureuse suivant quatre démarches.

Toutes ces travaux peuvent être introduits dans les classes aux différents niveaux du collège et du lycée.

## 1 Mais elle ressemble à un cercle !

Une possible activité anti-ennui est d'imiter de l'art du fil sur une feuille quadrillée, comme ce qui est affiché ci-dessus.

Ce type d'activité est relativement simple pour permettre de le faire pratiquer très tôt, même par un enfant pendant les premières années scolaires.

La courbe qui en résulte, le contour des « fils », ou plus précisément, la courbe dont les tangentes sont les fils, s'appelle une *enveloppe*.

Selon Wikipedia[1], l'*enveloppe d'une famille de courbes dans le plan* est une courbe qui est tangente à chaque élément de la famille en un point donné<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Cette définition est cependant polysémique: la page Wikipedia énumère d'autres méthodes non équivalentes pour introduire la notion d'enveloppes. La consulter pour une analyse plus détaillée des différentes définitions.

Laissez-nous supposer que l'enveloppe étudiée – en dessous du titre de cet article -, définie de la même manière que dans l'activité de l'apprenant, illustrée par la Fig. 1, est un cercle.

Dans l'enveloppe étudiée, il est clair qu'est utilisée la combinaison de 4 constructions simples, les axes sont perpendiculaires, et les sommes des nombres reliés est 8. Pour généraliser, ces sommes peuvent être changées en des nombres différents (mais fixés). Ces sommes seront notées  $d$  pour rappeler la *distance* à l'origine du point le plus éloigné pour les fils extérieurs.

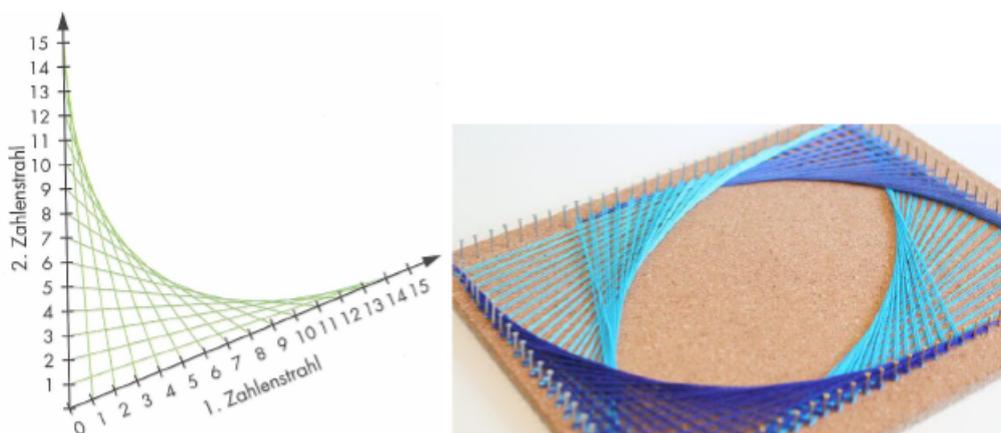


Fig. 1

(à gauche) Une activité pour de jeunes élèves : Rejoindre les nombres de chaque demi-droite pour obtenir la somme de 16 [2]. De telles activités sont associées aux 'tableaux de fils' qui peuvent être réalisés avec des fils de couture ou autres matériaux

(à droite) Il y a combinaison de quatre constructions simples, mais le résultat donne un aspect différent de celui affiché au début de cet article. [3]

Dans notre *supposition* de cercle, la famille des fils doit être à une égale distance du centre du cercle. Ceci est obligatoire car le cercle est l'unique courbe dont les tangentes sont équidistantes du centre. En raison de la symétrie des 4 parties, le seul centre possible est le centre de la figure.

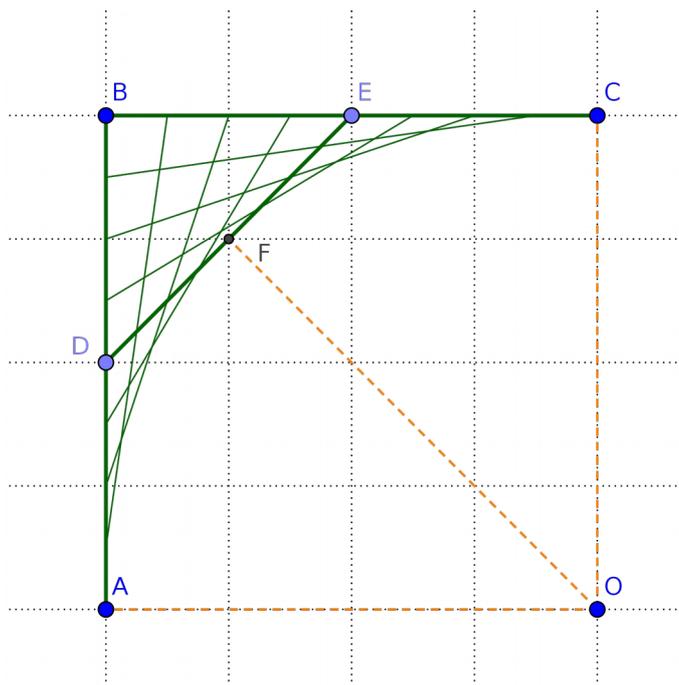


Fig. 2: Considérons trois fils de la famille et leur distance au centre présumé.

Considérons la partie supérieure gauche de la figure étudiée. Sur la gauche et le haut, les fils  $AB$  et  $BC$  sont à la distance  $d=OA=OC$  du centre  $O$ . D'autre part, le fil en diagonale  $DE$  est à la distance  $OF = \frac{3}{4} \cdot d \cdot \sqrt{2}$  du centre présumé, d'après les théorèmes de Pythagore et de Thalès.

Cette dernière distance est d'environ  $1,06 \cdot d$ , c'est-à-dire plus grande que  $d$ . En conséquence, la courbe ne peut pas être exactement un cercle. Autrement dit, ce n'est donc pas un cercle.

Dans de nombreux systèmes scolaires, les théorèmes de Pythagore et de Thalès sont habituellement enseignés tardivement, alors que les élèves sont déjà capables de mesurer simplement les longueurs  $OA$  et  $OF$  en utilisant une règle graduée. Cependant, il leur faudra dessiner une figure assez grande parce que la différence entre  $OA$  et  $OF$  n'est que d'environ 6%.

En fait, les deux méthodes « prouvent » évidemment que la courbe est différente d'un cercle, et la deuxième peut être débattue dès le début du collège.

## 2 OK, ce n'est pas un cercle, mais c'est quoi alors ?

Continuons avec une éventuelle solution en classe du problème. Puisque les fils sont plus faciles à observer que l'enveloppe, il semble logique de collecter plus d'informations à leur sujet.

Étendons la définition de l'enveloppe étudiée en ajoutant de plus en plus de fils dans les deux sens, nous apprendrons comment les pentes des fils varient (Fig. 3). Ici, nous remarquons que la partie supérieure-gauche de l'enveloppe étudiée à sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses (cf. Fig 1), il s'ensuit que, non seulement, les sommes, mais aussi les *différences* doivent être constantes, soit  $d = 10$ .

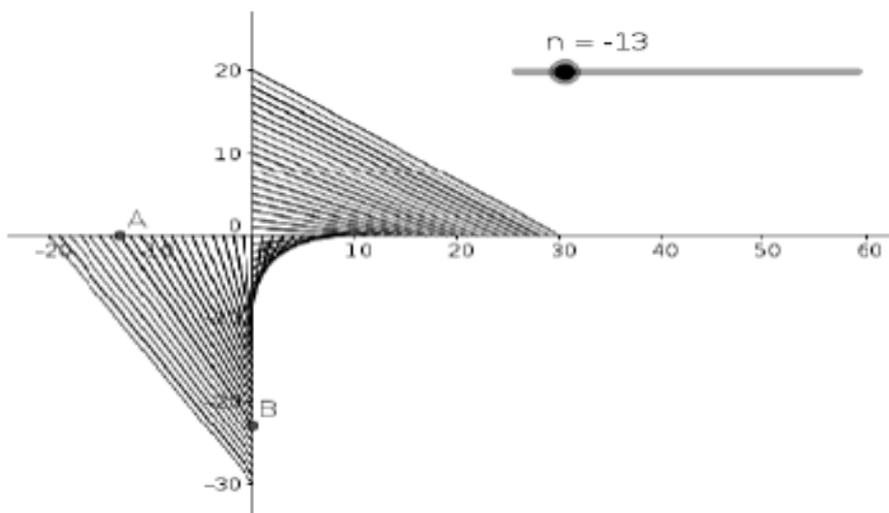


Fig. 3

Supposons que  $d=10$  et créons une applique GeoGebra comme indiqué dans la figure.

(Il est évident, qu'une valeur quelconque de  $d$  peut être choisie, sans amoindrir la généralisation.)

Soit un curseur  $n$  entier dans l'intervalle  $[-20,30]$  et les points  $A=(n,0)$  et  $B=(0,n-10)$ .

La famille des segments  $[AB]$  peut éclairer quelle courbe est l'enveloppe étudiée.

Dans cette extension, les fils font germer l'idée que les tangentes de la courbe, quand  $|n|$  est assez grande, sont presque parallèles à la droite dont une équation est  $y = -x$ . Cette observation permet de réfuter la perception que la courbe soit finalement une hyperbole (qui a deux asymptotes, mais qui ne sont jamais parallèles).

D'autre part, passons des segments de la Fig. 3 à leurs droites support.

Il nous vient alors une conjecture : « La courbe est une parabole ! » (Fig. 4).

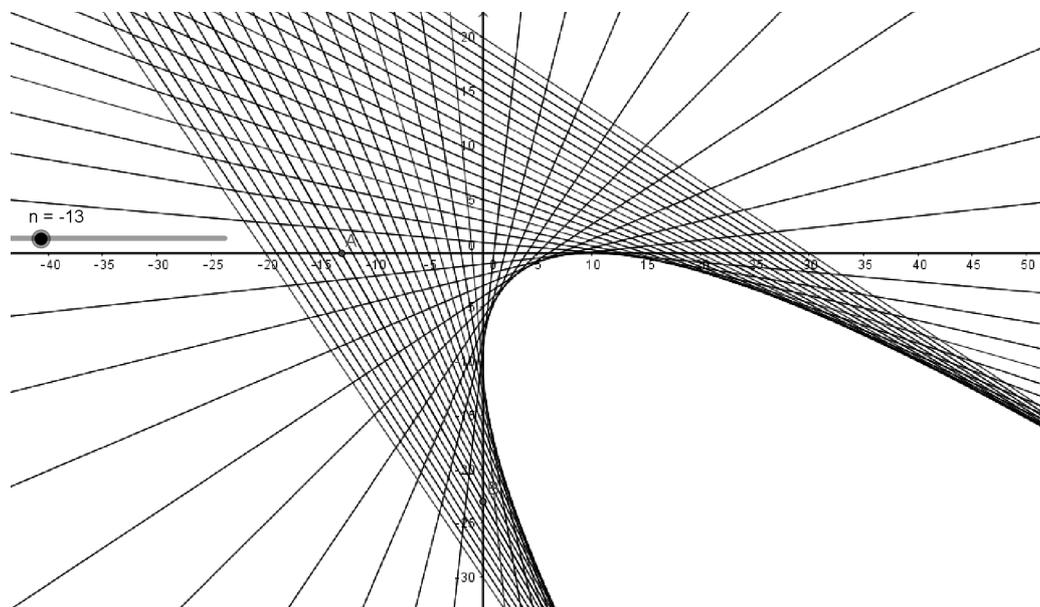


Fig. 4

Et la courbe observée doit être la réunion de 4 arcs de paraboles.

### 3 Nous avons une conjecture, pouvons-nous la vérifier ?

Une applique GeoGebra peut calculer explicitement l'équation de l'enveloppe étudiée et la tracer avec précision.

(Voir [4] pour une revue détaillée des outils logiciels disponibles actuellement pour visualiser les enveloppes dynamiquement.)

Pour des raisons techniques, un curseur ne peut pas être utilisé dans ce cas, il faudra nécessairement faire appel à une construction purement euclidienne. Les points libres  $A$  et  $B$  sont créés et ensuite le segment  $g = \text{Segment}[C, C']$  engendre la famille de fils. La commande  $\text{Enveloppe}[g, C]$  va alors calculer une courbe implicite, dont une équation, dans notre cas, est  $x^2 + 2xy - 20x + y^2 + 20y = -100$

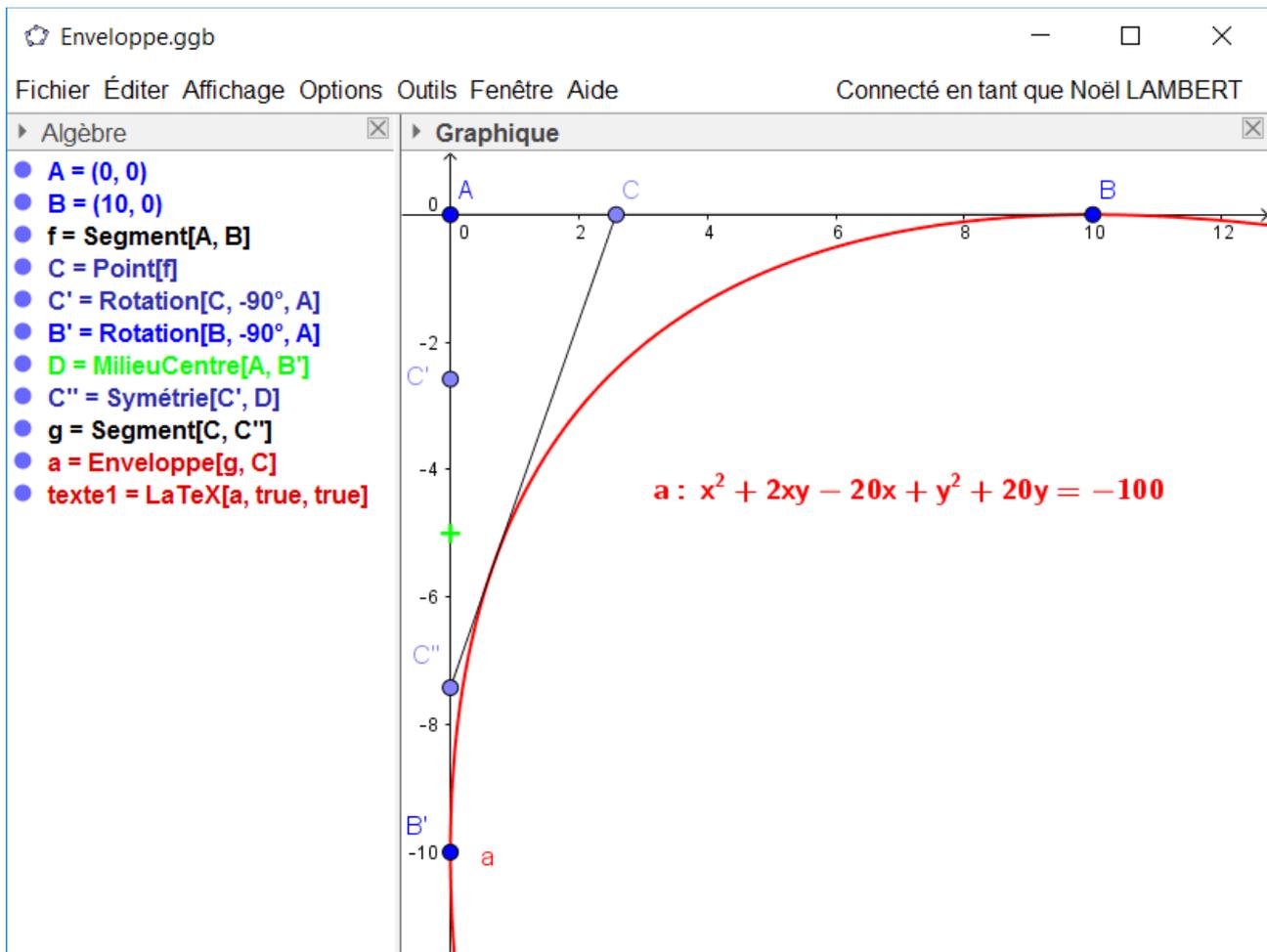


Fig. 5: Une applique GeoGebra pour calculer l'équation de la parabole et la représenter. Merci à Michel Iroir et Noël Lambert pour leur aide dans la méthode de construction. Une approche similaire peut être trouvée à : <http://dev.geogebra.org/trac/browser/trunk/geogebra/test/scripts/benchmark/art-plotter/tests/string-art-simple.ggb>

GeoGebra utilise des calculs symboliques lourds en arrière-plan pour trouver cette courbe. [5] Dès qu'ils sont effectivement réalisés, l'utilisateur peut alors déplacer les points  $A$  et  $B$  à différentes positions et étudier l'équation de la courbe implicite. Les calculs sont actualisés assez rapidement pour avoir un aperçu de la courbe résultante en général : ce sont clairement des courbes algébriques du second degré des variables  $x$  et  $y$ . Sans connaissance approfondie de la classification des courbes algébriques, bien sûr, les jeunes apprenants ne peuvent pas vraiment décider si la courbe résultante est en effet une parabole. Les apprenants avancés et les enseignants de mathématiques pourraient toutefois savoir que toutes les courbes quadratiques réelles sont des cercles, des ellipses, des hyperboles, des paraboles, une union de deux lignes ou un point dans le plan. Comme dans ce qui précède, nous pouvons soutenir que les positions des fils comme tangentes ne supportent que le cas des paraboles ici.

D'autre part, pour les jeunes apprenants, nous pouvons encore trouver de meilleurs positions pour  $A$  et  $B$ . Il semble assez évident que la courbe reste définitivement la même (à une similitude près), on a donc la liberté de définir les positions de  $A$  et  $B$ . En laissant  $A$  à l'origine et en positionnant  $B$  sur la droite dont une équation est  $y = -x$  nous remarquons que l'équation de la courbe est sous la forme  $y = ax^2 + bx + c$  qui est la forme habituelle d'introduction des paraboles en classe. (Dans notre cas en fait  $b = 0$ .) Par exemple, quand  $B = (10, -10)$ , la courbe implicite a pour équation  $x^2 + 20y = -100$ , ce qui peut être

facilement converti en  $y = -\frac{1}{20}x^2 - 5$  .

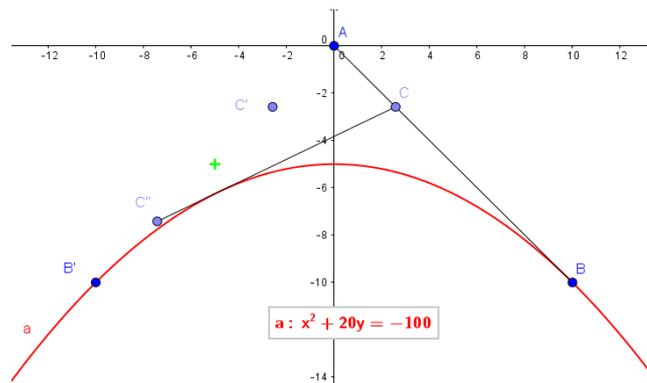


Fig. 6: Avec  $B=(10,-10)$ , nous obtenons une équation simple.

Ce résultat est obtenu grâce à des étapes précises de calculs algébriques dans GeoGebra. On peut vérifier ces étapes en examinant le journal interne, dans notre situation, 16 variables et 11 équations seront utilisées, nécessitant le calcul d'un déterminant de Jacobi et de bases de Gröbner lors de l'élimination de toutes les variables sauf deux du système d'équations. Ceci étant, GeoGebra fournit effectivement une preuve, bien que les étapes restent cachées à l'utilisateur. (Afficher les étapes détaillées lors de la manipulation d'un système d'équations avec tant de variables n'a aucun sens du point de vue pédagogique : Les étapes sont plutôt mécaniques et peuvent noircir des centaines de pages.)

En conclusion, il est prouvé que la courbe est une parabole. Bien sûr, les apprenants ont le droit de vouloir comprendre pourquoi il en est ainsi.

## 4 Démonstrations en classe.

Nous présentons ici deux démonstrations simples sur le fait que l'enveloppe est une parabole dans la Fig. 6.

La première méthode suit [6].

Nous devons prouver que le segment  $[CC'']$  est toujours tangent à la courbe dont une équation est  $y = -\frac{1}{20}x^2 - 5$  .

D'abord, nous calculons l'équation de la droite  $(CC'')$  pour en déterminer le(s) point(s) d'intersection avec la parabole.

Nous constatons d'abord que si pour le point  $C=(e,-e)$  , alors pour le point  $C''=(e-10,e-10)$  .

Maintenant, nous avons deux démarches possibles pour poursuivre :

**4.1** Soit pour la droite  $(CC'')$  une équation de la forme  $y=ax+b$  , il vient :

$$\text{Pour le point } C \quad -e = a \cdot e + b \quad (1)$$

$$\text{Pour le point } C'' \quad e - 10 = a \cdot (e - 10) + b \quad (2)$$

Par soustraction (1) - (2) on obtient  $a = 1 - \frac{1}{5}e$  et, en substituant dans (1),  $b = -2e + \frac{1}{5}e^2$  .

Pour obtenir le(s) point(s) d'intersection, on résout l'équation  $ax+b=-\frac{1}{20}x^2-5$  qui peut être réécrite en l'équation du second degré  $\frac{1}{20}x^2+ax+b+5=0$ , de discriminant  $\Delta = a^2 - \frac{1}{5}b - 1 = 0$  après substitution par leur valeur de  $a$  et de  $b$ .

Nous sommes donc bien en présence d'une situation de tangence.

**4.2** Une autre méthode pour démontrer que la droite  $(CC')$  est une tangente à la parabole est d'utiliser du calcul différentiel élémentaire. Les programmes scolaires introduisent habituellement les calculs d'équation des tangentes aux courbes représentatives des fonctions polynomiales du deuxième degré.

Soit  $T=(t, -\frac{1}{20}t^2-5)$  un point de la parabole. La pente de la tangente  $y$  est, par dérivation, de  $-\frac{1}{10}t$ . Cela signifie qu'une équation de la tangente est  $y=-\frac{1}{10}t.x+b$  soit au point  $T$   $-\frac{1}{20}t^2-5=-\frac{1}{10}t.t+b$  nous conduisant à  $b=\frac{1}{20}t^2-5$ .

L'équation de la tangente est par conséquent  $y=-\frac{1}{10}t.x+\frac{1}{20}t^2-5$ . (3)

Les intersections de cette tangente et des droites ayant pour équation  $y=-x$  ou  $y=x$ , respectivement, ont pour abscisses, en substituant successivement  $-x$  et  $x$  à  $y$  dans (3) :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{20}t^2-5}{\frac{1}{10}t-1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\frac{1}{20}t^2-5}{\frac{1}{10}t+1} \quad \text{soit sans charrette à foins} \quad x_1 = \frac{t^2-100}{2t-20} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{t^2-100}{2t+20}$$

Un calcul algébrique nous permet de vérifier que  $x_1-x_2=10$  et de retrouver les points  $(x_1, -x_1)$  et  $(x_1-10, x_1-10)$  conformes au constat établi au début de ce 4ème paragraphe. Nous avons bien retrouvé les fils de la construction.

La deuxième démarche est techniquement plus longue que la première mais réalisable dans de nombreuses classes. Les deux démarches sont des démonstrations purement analytiques sans aucune connaissance de la définition géométrique d'une parabole. Le fait est que dans de nombreuses classes, celle-ci n'est pas introduite ni même mentionnée.

## 5 Une approche formelle.

Dans les classes où la définition géométrique d'une parabole est quand même introduite, la plus courante est que c'est le lieu des points du plan qui sont équidistants à la fois d'un point donné, appelé « Foyer » et d'une droite donnée, appelée « Directrice ».

### 5.1 Une réponse automatisée :

Sans autre considération, il est possible de vérifier (en fait, prouver) que la courbe étudiée est une parabole aussi au sens symbolique. Pour ce faire, on peut invoquer [7] l'outil Relation de GeoGebra après avoir construit la parabole à l'aide de la syntaxe Parabole[ <Point>, <Droite> ] comme on le

voit sur la Fig. 7.

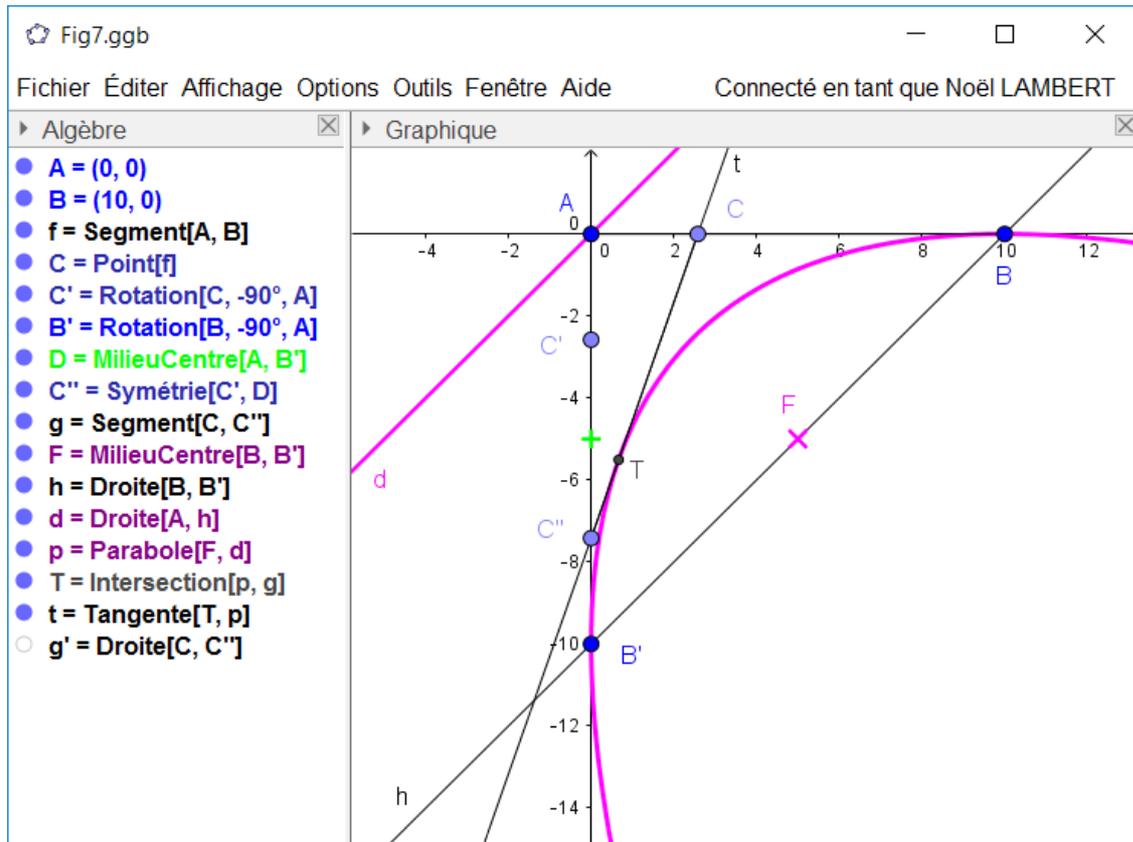


Fig. 7: Une construction géométrique de la parabole dans GeoGebra.

Ici, le foyer  $F$  est le milieu de  $[BB']$ , et la directrice est la droite  $(d)$  parallèle à  $(BB')$  passant par  $A$ . Ces informations devraient probablement être tuées par l'enseignant - les apprenants pourraient les trouver d'eux-mêmes. Maintenant il faut vérifier que le fil  $[CC']$  est bien tangent à la parabole au point  $T$  où il la « coupe ». La tangente  $(t)$  en  $T$  à la parabole a aussi été construite. Manifestement, cette droite  $(t)$  est la droite support du segment  $g = \text{Segment}[C, C']$ . À ce stade, il est possible de comparer  $g' = \text{Droite}[C, C']$  et  $t$  en utilisant l'outil Relation.

L'outil Relation compare d'abord les deux objets numériquement et retourne qu'ils sont égaux. En cliquant sur "Plus...", l'utilisateur obtient confirmation du résultat au niveau formel [8].

Nous rappelons que, bien que la construction soit définie synthétiquement, les calculs symboliques ne sont effectués qu'après une traduction de la construction dans une configuration algébrique. La preuve interne de GeoGebra repose à nouveau sur des équations algébriques cachées à l'utilisateur. Mais dans ce cas, nous avons effectivement une affirmation générale pour chaque configuration possible, pas pour un seul cas particulier, comme c'était le cas avec la commande Enveloppe.

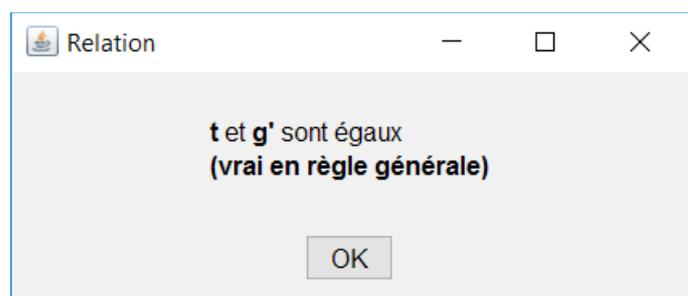
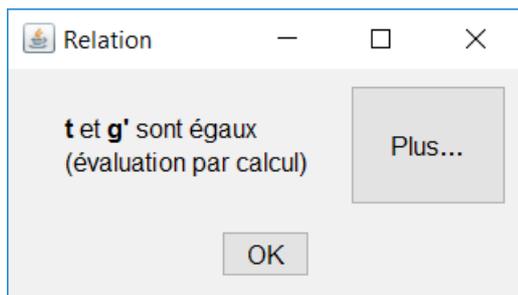


Fig. 8 : Une évaluation numérique puis formelle

## 5.2 Une démonstration classique :

Enfin, nous donnons une démonstration classique pour répondre à la question initiale. Ici, chaque détail utilise uniquement des considérations géométriques.

La première partie de la preuve est une remarque bien connue sur une propriété de la tangente jouant le rôle de bissectrice. À savoir que tout symétrique du foyer par rapport à une tangente se trouve sur la directrice. (Voir par exemple [6], section 3.1 Pour une courte preuve.) De toute évidence, il est suffisant de montrer que les fils ont ce type de propriété : cela entraînera la confirmation de l'affirmation.

Dans la construction, la tangente à la parabole est appelée  $(t)$ . Soit  $F'$  le symétrique de  $F$  par rapport à  $(t)$ . Nous allons prouver que  $F' \in (d)$ . Soit  $G$  le point d'intersection de  $(t)$  et de  $[FF']$ .

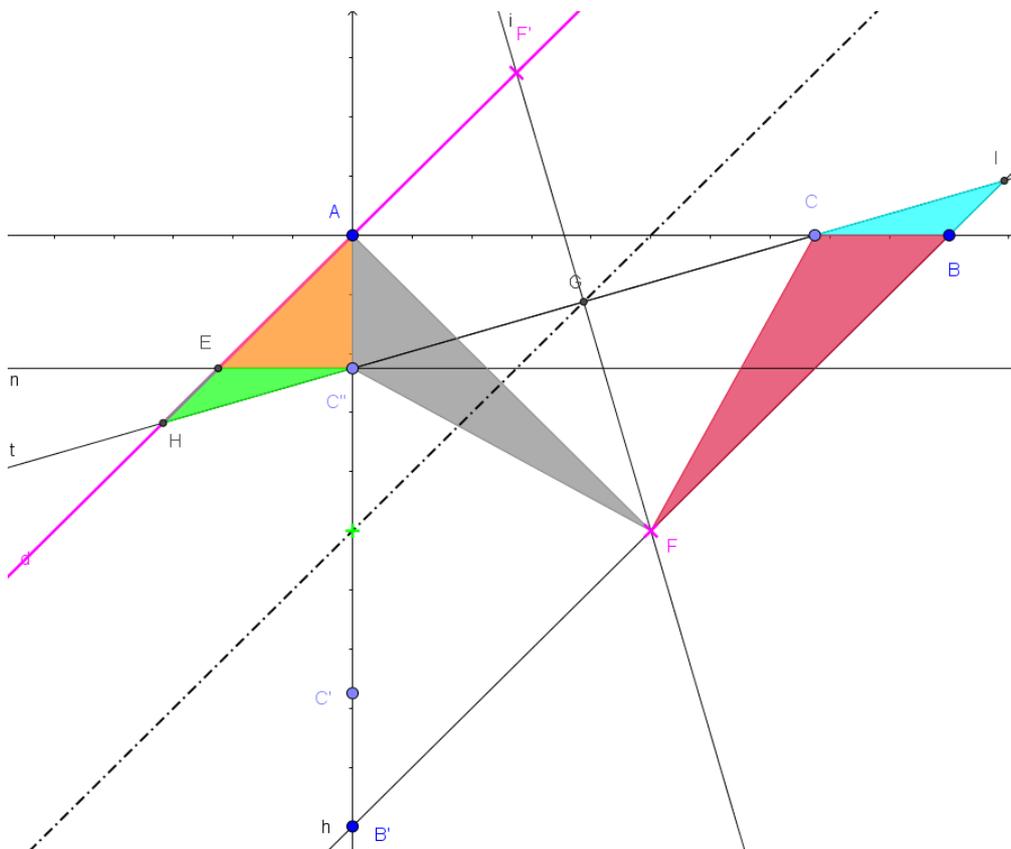


Fig. 9 : Une démonstration classique.

Par construction,  $AC'' = BC$ ,  $\widehat{C''AF} = \widehat{CBF} = 45^\circ$  et  $BF = AF$ , les triangles  $FBC$  et  $FAC''$  sont donc isométriques, d'où  $FC = FC''$  et le triangle  $CFC''$  est isocèle.

De toute évidence, les angles  $\widehat{CGF}$  et  $\widehat{C''GF}$  sont droits en raison de la réflexion, et  $(FG)$  est la médiatrice de  $[CC'']$ , d'où  $CG = C''G$ .

Soit  $(n)$  une droite parallèle à  $(AB)$  passant par  $C''$  et  $E$  son point d'intersection avec  $(d)$ . Soit, aussi, les points d'intersection  $H$  de  $(t)$  avec  $(d)$ , et  $I$  celui de  $(t)$  avec la droite  $(BB')$ . Comme  $(d)$  et  $(BB')$  sont parallèles, de même  $(AB)$  et  $(n)$  sont aussi parallèles et  $EC'' = CB$  (car  $E$  est en fait l'image de  $A$  dans la rotation de centre  $C''$  d'angle 90 degrés), nous concluons que les triangles  $C''EH$  et  $CBI$  sont isométriques. Cela signifie que  $IC = C''H$ .

C'est-à-dire, en utilisant aussi  $CG = C''G$ ,  $G$  doit être le milieu de  $[HI]$ , donc  $G$  doit appartenir à l'axe de symétrie des deux droites parallèles  $(d)$  et  $(BB')$ . En conséquence, le

point  $F'$ , symétrique de  $F$  par rapport à  $G$  est sûrement un point de la droite  $(d)$ .

## 6 Conclusion

Une analyse des enveloppes dans les tableaux de fils sont présentées à différents niveaux de l'enseignement des mathématiques, afin de réfuter une conjecture erronée, établir une affirmation exacte et la démontrant par différentes méthodes.

Une discussion d'une question non triviale en utilisant différentes voies permet de donner une meilleure compréhension du problème. Et ce qui est important, que le raisonnement à base d'« évidence » visuelle peut être trompeur, et que seulement des preuves rigoureuses (ou rigoureuses, bien que établies par ordinateur) ne peuvent être satisfaisantes.

Il peut être noté que la propriété de la parabole comme enveloppe en tableau de fils est bien connue dans la littérature sur les courbes de Bézier, mais, en règle générale, ne sont pas approfondies pendant la formation des enseignants en mathématiques.

L'algorithme de De Casteljeau pour une courbe de Bézier de degré 2 est lui-même une preuve que la courbe est une parabole. (Voir [9, 10] pour plus de détails.)

De même, parmi les professionnels des mathématiques, cette propriété semble rarement connue.

Un exemple récent est un tweet enflammé de février 2017 (Fig.10).

Turns out this is the gap between four parabolas! Wow, I wasn't expecting it to be that accurate 🙏 (@geogebra to the rescue again)

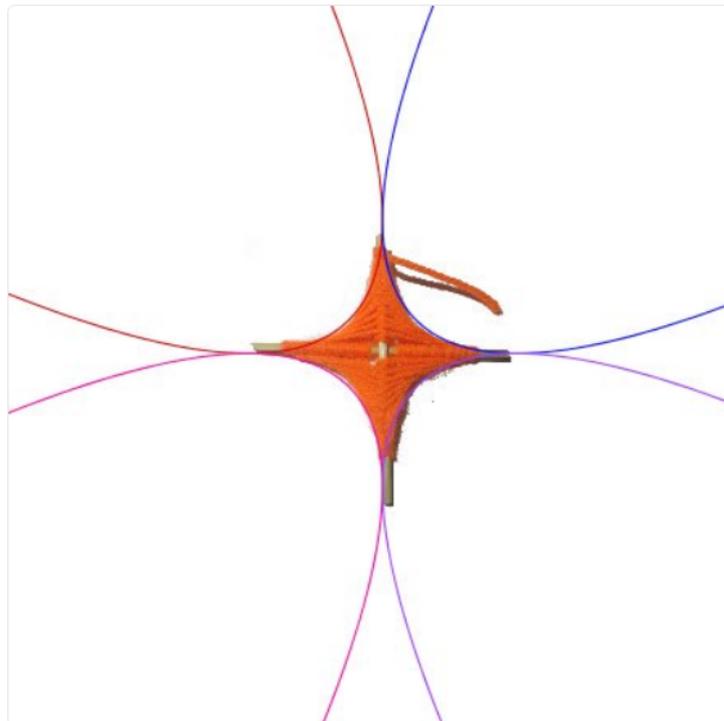


Fig. 10 Une autre expérimentation.

D'autre part, notre approche a mis en évidence l'introduction en classe de la parabole dans les tableaux de fils, et a suggéré des méthodes très récentes intégrant l'informatique au collège ou au lycée pour améliorer le travail de l'enseignant et les compétences des apprenants.

Enfin, nous remarquons que la définition de cette enveloppe par les tableaux de fils semble similaire

à l'enveloppe d'autres familles de droites.

Par exemple, l'enveloppe de l'échelle glissant contre un mur qui conduit à une courbe différente, une astroïde [11, 12] qui est une courbe algébrique réelle du degré 6. Bien que « physiquement » elle soit plus facile à construire (on a juste besoin d'un objet en forme d'échelle, par ex. un stylo), l'analyse géométrique est plus compliquée et implique généralement des dérivées partielles. (Voir aussi une preuve d'identification de la parabole du tableau de fils en utilisant des dérivées partielles.)

## **Remerciements**

L'auteur remercie Tomás Recio et Noël Lambert pour leurs commentaires qui ont permis l'amélioration du manuscrit.

La figure introductive de l'article avait été dessinée par Benedek Kovács (12 ans), élève en collège.

- [1] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Enveloppe\\_\(géométrie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Enveloppe_(géométrie))
- [2] Boxhofer, E., Hubert, F., Lischka, U., Panhuber, B.: mathematiX. Veritas, Linz (2013)
- [3] Morgan, S.: Math + art = string art. [eHow Mom Blog](#) (2013)
- [4] Botana, F., Recio, T.: Computing envelopes in dynamic geometry environments. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* (2016) 1–18
- [5] Kovács, Z.: Real-time animated dynamic geometry in the classrooms by using fast Gröbner basis computations. *Mathematics in Computer Science* 11 (2017)
- [6] Botana, F., Kovács, Z.: New tools in GeoGebra offering novel opportunities to teach loci and envelopes. *CoRR abs/1605.09153* (2016)
- [7] Kovács, Z.: The Relation Tool in GeoGebra 5. In Botana, F., Quaresma, P., eds.: *Automated Deduction in Geometry: 10th International Workshop, ADG 2014, Coimbra, Portugal, July 9-11, 2014, Revised Selected Papers*. Springer International Publishing, Cham (2015) 53–71
- [8] Kovács, Z., Recio, T., Vélez, M.P.: *GeoGebra Automated Reasoning Tools. A Tutorial*. A GitHub project (2017) <https://github.com/kovzol/gg-art-doc>
- [9] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Parabole>
- [10] Hohenwarter, M.: *GeoGebra: Vom Autodesign zur Computer-schriftart*. *Computeralgebra Rundbrief, Sonderheft zum Jahr der Mathematik* (2008) 9–10  
<http://www.springerprofessional.de/>
- [11] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Astroïde>
- [12] Kovács, Z.: [Envelope of the sliding ladder](#). *GeoGebra Materials* (2014)