Introduction

Dans cet article, je traite un exercice qui m'était proposé par un collègue. Cet exercice fait partie des problèmes de recherche de lieu dans l'espace.

Au début de mes recherches, je me suis interdit d'utiliser mon ordinateur et tout autre outil utilisant les T.I.C et en particulier les logiciels de géométrie dynamique, et bien, je reconnais que mes résultats n'étaient pas encourageants!

J'ai renoncé à ma décision et je me suis permis de me servir d'un logiciel de géométrie dynamique : GeoGebra 5 qui m'a permis de :

- faire une figure
- Enoncer une conjecture sur la nature et les éléments caractéristiques du lieu
- Infirmer ou confirmer certaines apparences remarquées sur la figure et qui peuvent représenter des éléments de base dans certaines étapes de mes démonstrations

Enoncés

Soit ABC un triangle rectangle en A, (P) est le plan perpendiculaire à la droite (AC) et passant par A, ζ est le cercle de diamètre [AB] contenu dans (P). M est un point variable sur le cercle ζ. H est le projeté orthogonal de A sur (CM).

On se propose de trouver sur quelle ligne varie H lorsque M varie sur ζ.

1°) En utilisant un logiciel de géométrie de l'espace:

a) Réaliser une figure
b) Déplacer M et observer la trajectoire du point H.
c) Emettre une conjecture sur la nature du lieu de H

2°) Démontrer la conjecture.

(Problème de lieu page 161 du Tome 2 du manuel Tunisien de la 2ème Sciences)

Haut du document

Solution

1°) **a)** Figure: Voir vidéo https://www.youtube.com/watch?v=aclETH1odhw

b) Trajectoire du point H : Voir vidéo https://www.youtube.com/watch?v=4Qspq2peqGk

c) Conjecture sur la nature du lieu de H: le lieu de H est le cercle de diamètre [AA'] inclus dans le plan perpendiculaire à (BC) en A' (A': le projeté orthogonal de A sur (BC)):

Voir vidéo http://youtu.be/7d8fPjtq-00

Vérification de la conjecture: Voir vidéo http://youtu.be/CUvGGFNCJfI

2°) Dans toute la suite, on désignera par :

- A': le projeté orthogonal de A sur (BC)
- I: le milieu de [AA']
- (Q): le plan (BCM) (lorsque M $\neq$ B)

Haut du document

Proposition 1 (Niveau 2ème Année Secondaire)

1ère étape

Soit K le projeté orthogonal de A sur (Q) et supposons que K $\neq$ H

alors A, H et K ne sont pas alignés

donc ils définissent un plan: (AHK)

alors (AK) est orthogonale à (CM) et on sait déjà que (AH) est perpendiculaire à (CM)

donc du point A –qui est extérieur à (CM)- passent deux droites orthogonales à (CM):

ce qui est impossible

alors K = H et par suite H est le projeté orthogonal de A sur (Q)
alors (AH) est orthogonale à (BC) et on sait déjà que (AA') est perpendiculaire à (BC)
alors (BC) est orthogonale à (AH) et à (AA') qui sont deux droites sécantes du plan (AA'H) = (R)
donc (BC) est perpendiculaire à tous les plans (AA'H) en A'
or par un point donné ne passe qu'un seul plan perpendiculaire à une droite donnée
ainsi pour tout point M (et par suite pour tout point H), le plan (AA'H) est unique: on le notera (R)

On retient alors que:
Pour tout point M du cercle ζ , H appartient au plan (R) perpendiculaire à la droite (BC) en A'.

$2^{ème}$ étape

D'après la $1^{ère}$ étape, H est le projeté orthogonal de A sur (Q)

$$\left.\begin{array}{r} alors\ \ (AH)\perp(Q) \\ et\ on\ a:(A'H)\subset(Q) \end{array}\right\}\Rightarrow(AH)\perp(A'H)\Rightarrow \widehat{AHA'}=90°$$

Ainsi pour tout point M du cercle ζ , on a:

$$\left.\begin{array}{c} H\in(R):\ plan\ fixe\, qui\ contient\ A\ et\ A' \\ \widehat{AHA'}=90° \end{array}\right\}\Rightarrow H\ \ \text{var}\, ie\ sur\ le\ cercle\ de\ diamètre\ [AA']$$

Conclusion

Quand M varie sur ζ , H décrit sur le cercle de diamètre [AA'] du plan (R) perpendiculaire à (BC) en A'

Haut du document

Proposition 2 (Intersection plan et sphère)

1ère étape

On reprend la $1^{ère}$ étape de la proposition 1.
On en retient que: Pour tout point M du cercle ζ , H appartient au plan (R) perpendiculaire à la droite (BC) en A'

$2^{ème}$ étape

D'après la $1^{ère}$ étape, H est le projeté orthogonal de A sur (Q)

$$\left.\begin{array}{r} alors\ \ (AH)\perp(Q) \\ et\ on\ a:(A'H)\subset(Q) \end{array}\right\}\Rightarrow(AH)\perp(A'H)\Rightarrow \widehat{AHA'}=90°$$

alors H appartient à la sphère S de diamètre [AA'], soit I son centre.

Résumé

Pour tout point M du cercle ζ , on a :

$$\left.\begin{array}{l} H \in (R):\ plan\ \ fixe\ qui\ contient\ \ A\ \ et\ \ A' \\ H \in sphère\ S\ \ de\ centre\ I\ \ et\ \ de\ \ rayon\ \ IA \end{array}\right\} \Rightarrow H \in S_{(I,IA)} \cap (R)$$

3ème étape Nature de : $S_{(I,IA)} \cap (R)$

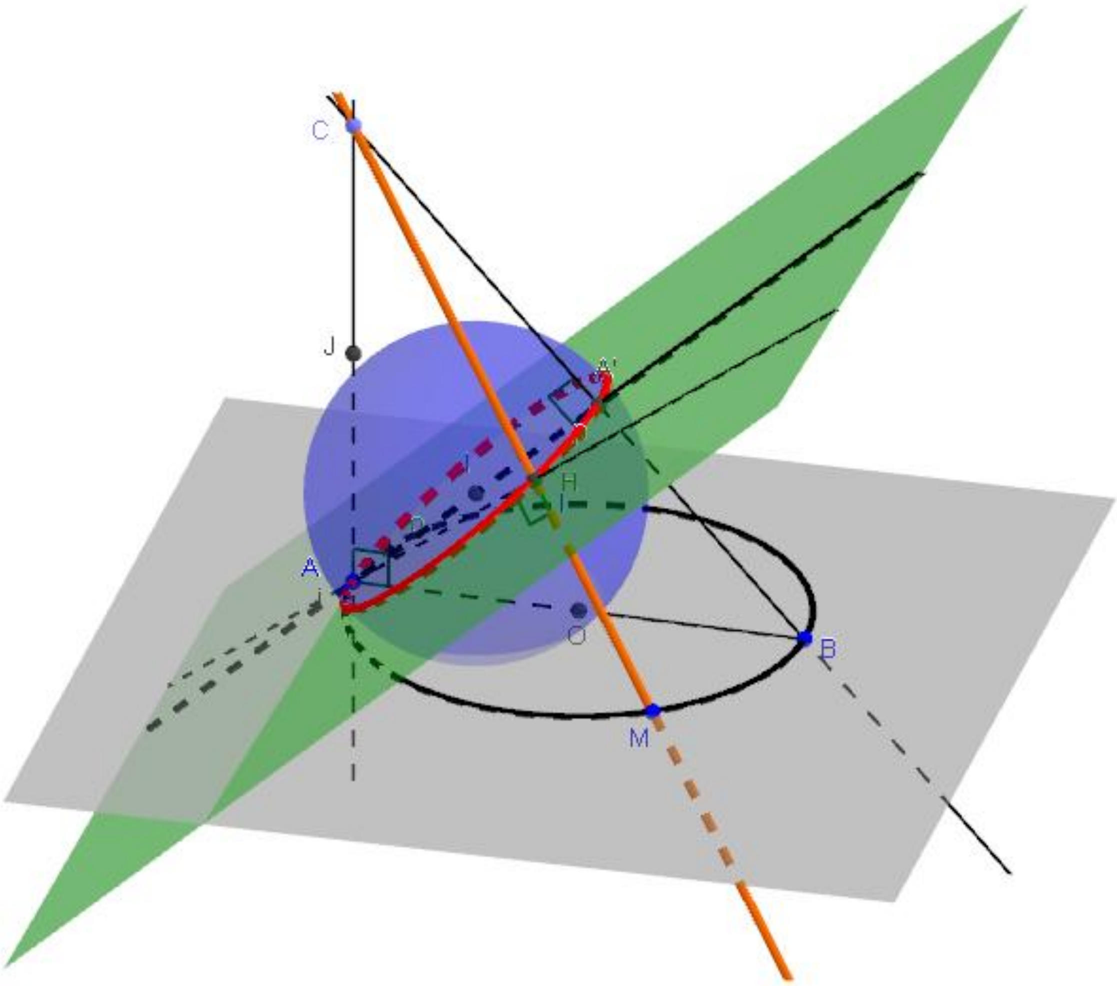
A et A' sont deux points de (R)

alors le point I = A*A' est un point de (R) (d(I,(R)) = 0 < IA)

donc la sphère $S_{(I,IA)}$ et le plan (R) se coupent suivant le cercle de centre I et de rayon IA inclus dans ce plan

Conclusion

Quand M varie sur ζ , H décrit sur le cercle de diamètre [AA'] du plan (R) perpendiculaire à (BC) en A'



Haut du document

Proposition 3 (Intersection plan et sphère)

1ère étape

On reprend la 1ère étape de la proposition 1.

On en retient que: Pour tout point M du cercle ζ , H appartient au plan (R) perpendiculaire à la droite (BC) en A'

2ème étape

H est le projeté orthogonal de A sur (CM)

$$\Rightarrow (AH)\perp(CH) \Rightarrow \widehat{AHC} = 90°$$

alors H appartient à la sphère S' de diamètre [AC], soit J son centre.

Résumé

Pour tout point M du cercle ζ , on a : $\left.\begin{array}{r} H\in(R):\ plan\ fixe\ qui\ contient\ A\ et\ A' \\ H\in sphère\ S'\ de\ centre\ J\ et\ de\ rayon\ JA \end{array}\right\}$

3ème étape Nature de : $S'_{(J,JA)} \cap (R)$

Sous-étape 3.1

On a $\left.\begin{array}{r} H\ est\ le\ projeté\ orthogonal\ de\ A\ sur\ (Q) \\ \Rightarrow (AH)\perp(Q) \\ et\ on\ a\ (CA')\subset(Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (CA')\, est\ orthogonale\ à\ (AH)$

et $A'AC\ rectangle\ en\ A' \quad \Rightarrow \quad (CA')\perp(AA')$

et puisque (AA') et (AH) sont deux droites sécantes du plan (R), on aura (CA') perpendiculaire à (R)

$$\left.\begin{array}{r} (CA')\perp(R) \\ (IH)\subset(R) \end{array}\right\} \Rightarrow (CA')\ est\ orthogonale\ à\ (IH)$$

D'autre part, on a: $\left.\begin{array}{r} A'AC\ triangle \\ I = A*A' \\ J = A*C \end{array}\right\} \Rightarrow (IJ)\,//\,(CA')$

ainsi: $\left.\begin{array}{r} (CA')\ est\ orthogonale\ à\ (IH) \\ (CA')//(IJ) \end{array}\right\} \Rightarrow (IJ)\perp(IH) \qquad (1)$

on a aussi: $\left.\begin{array}{r} A'AC\ rectangle\ en\ A' \\ (IJ)//(CA') \end{array}\right\} \Rightarrow (IJ)\perp(AA')\quad en\ I \qquad (2)$

et (IJ) et (AA') sont deux droites sécantes du plan (R) (3)

de $(1), (2)$ *et* (3) , on déduit que I est le projeté orthogonal de J sur (R)

alors la distance de J à (R) est IJ : $d\left(J,(R)\right) = IJ$

Sous-étape 3.2

Le triangle A'AC est rectangle en A'

$$\Rightarrow CA' < CA$$

$$\Rightarrow \frac{CA'}{2} < \frac{CA}{2}$$

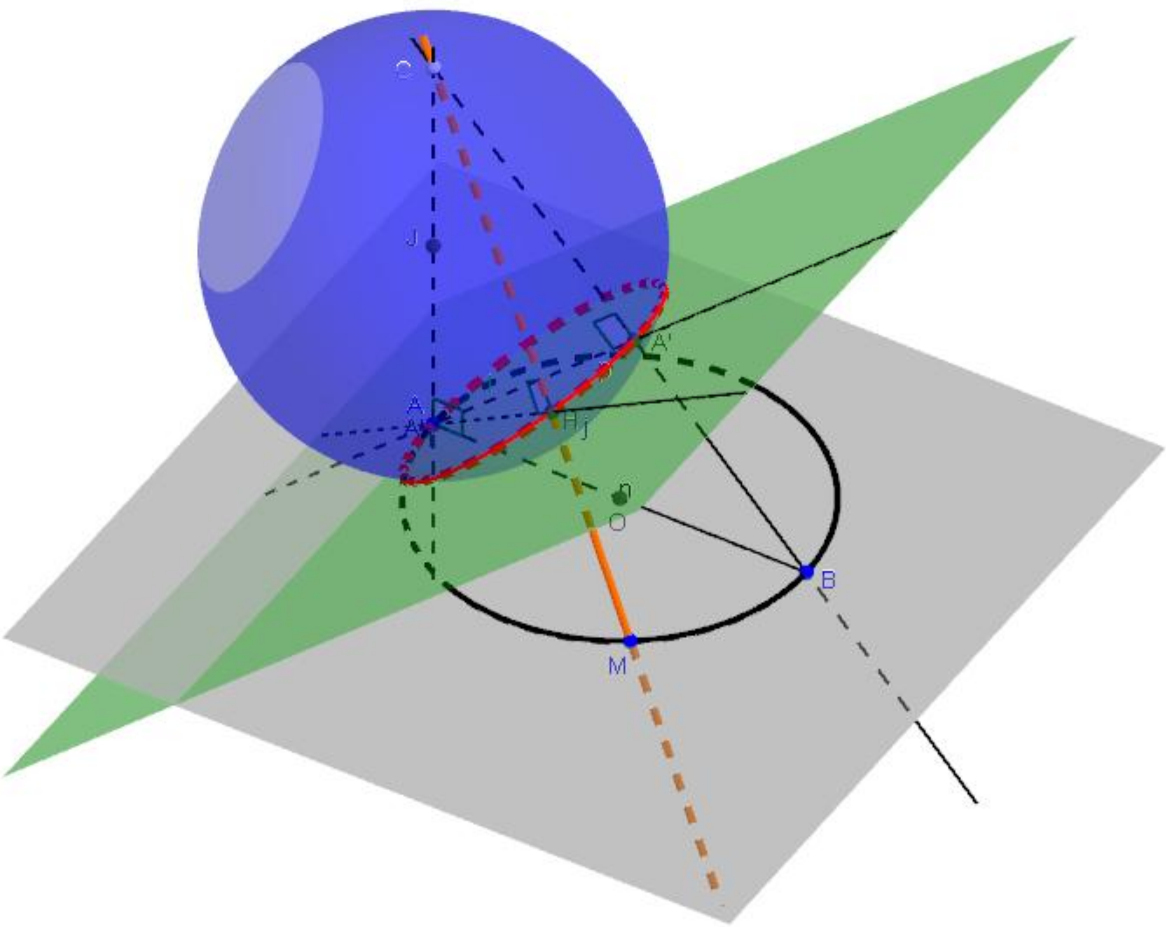
$$\Rightarrow JI < JA$$

$$\Rightarrow d\left(J,(R)\right) < JA \qquad (JA = rayon\ de\ la\ sphère\ S')$$

Conclusion

La sphère S'$_{(J\ ,\ JA)}$ et le plan (R) se coupent suivant le cercle de centre I: projeté orthogonal de J sur (R) et de rayon IA: lieu des points H. (A appartient à ce cercle car si M = A on aura M = A = H)

Quand M varie sur ζ , H décrit sur le cercle de diamètre [AA'] du plan (R) perpendiculaire à (BC) en A'



Haut du document

Proposition 4 (Intersection de deux sphères)

1ère étape

On reprend la 1ère étape de la proposition 1.

On en retient que: Pour tout point M du cercle ζ , H appartient au plan (R) perpendiculaire à la droite (BC) en A'

2ème étape

D'après la 1ère étape, H est le projeté orthogonal de A sur (Q)

$$\left.\begin{aligned} alors\quad (AH)\perp(Q) \\ et\ on\ a:(A'H)\subset(Q)\end{aligned}\right\}\Rightarrow (AH)\perp(A'H)\Rightarrow \widehat{AHA'}=90°$$

alors H appartient à la sphère S de diamètre [AA'], soit I son centre.

3ème étape

H est le projeté orthogonal de A sur (CM)

$$\Rightarrow (AH)\perp(CH)\Rightarrow \widehat{AHC}=90°$$

alors H appartient à la sphère S' de diamètre [AC], soit J son centre.

4ème étape

Rappelons la règle:

Si deux sphères $S_{(O\,,\,r)}$ et $S'_{(O',\,r')}$ sont telles que $|r-r'|<OO'<r+r'$ **alors** elles se coupent suivant un cercle d'axe (OO') et dont le centre K vérifie $2\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{OO'}=r^2-r'^2$ (où L = O*O')

Dans notre situation:

AIJ est un triangle dont la mesure du côté:

- [IJ] est la distance entre les centres des sphères S et de S'
- [AI] est le rayon de S
- [AJ] est le rayon de S'

On a: $|AI-AJ|<IJ<AI+AJ \qquad (AIJ\ \ triangle)$

$$\Rightarrow \quad |r-r'|<IJ<r+r'$$

alors S et S' se coupent suivant un cercle d'axe (IJ) et dont le centre K vérifie:

$$2\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{IJ}=r^2-r'^2 \qquad (L=I*J)$$

$$\Rightarrow \quad 2.\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AI}^2 - \overrightarrow{AJ}^2$$

$$\Rightarrow \quad 2.\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ}\right)\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2.\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{IJ} = 2.\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{AL}$$

$$\Rightarrow \quad 2.\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{IJ} - 2.\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{AL} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2.\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{IJ} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AL}.\overrightarrow{IJ} = 0 \\ \overrightarrow{AL} \neq \vec{0} \;\; et \;\; \overrightarrow{IJ} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow (AL) \perp (IJ) \qquad (1)$$

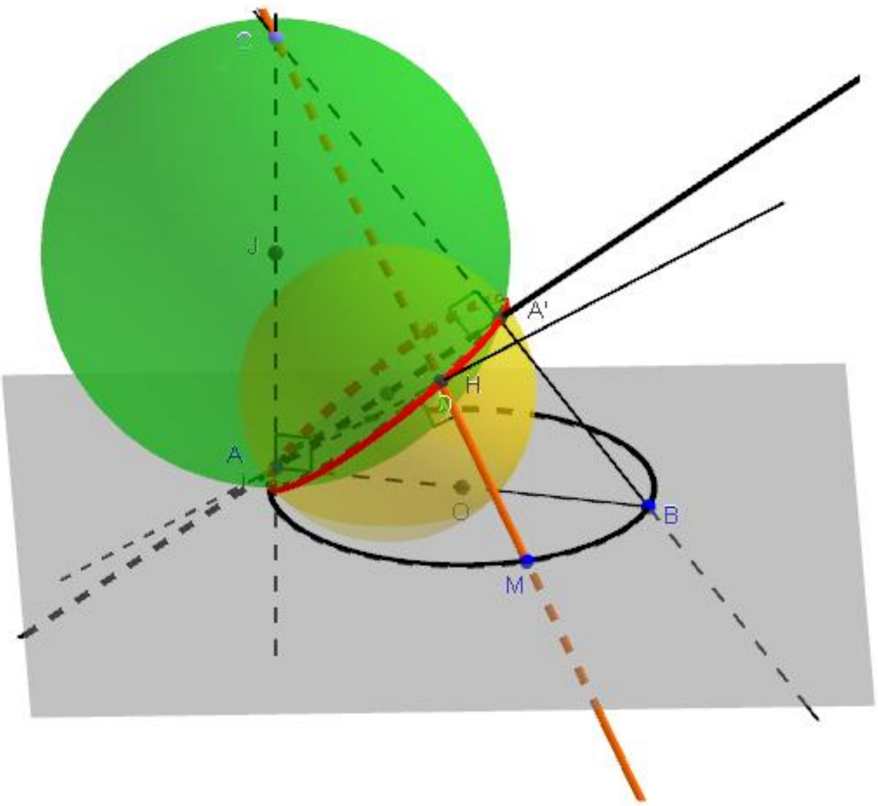
A ce niveau, rappelons que: $\left.\begin{array}{r} (IJ)//(BC) = (CA') \\ et \;\; (AA') \perp (CA') \end{array}\right\} \Rightarrow (AA') \perp (IJ)$

$$\Rightarrow (AI) \perp (IJ) \;\; en \;\; I \quad (I = A * A') \qquad (2)$$

D'après (1) et (2), on déduit que L = I

Conclusion

Le point H décrit le cercle passant par A et ayant pour centre I et pour axe (IJ)



Haut du document

Conclusion

La situation de blocage dans laquelle je m'étais trouvé avant de me servir du logiciel, ainsi que collègue qui m'a proposé l'exercice (et qui est d'ailleurs de ma génération) reflète une défaillance dans notre formation en géométrie dans l'espace.

Mais la question reste pour moi :

- Est-ce que cette défaillance est dûe à nous-mêmes ou aux programmes qu'on nous a enseignés durant notre cursus scolaire et universitaire ?
- Pourquoi nos prédécesseurs ne souffraient pas autant malgré la pauvreté de leur époque en T.I.C ?

Peut-être la réponse à ma question servira d'outil pour fixer une stratégie adéquate qui conciliera les enseignants et leurs élèves avec l'enseignement de la géométrie dans l'espace. (Je ne parle pas de la géométrie analytique).

Haut du document