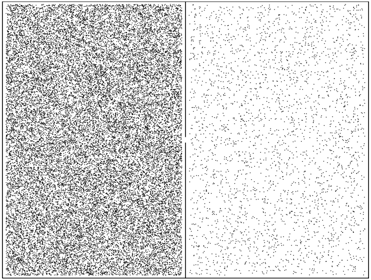
Autour du modèle d'Ehrenfest

Florent Malrieu

Université de Tours

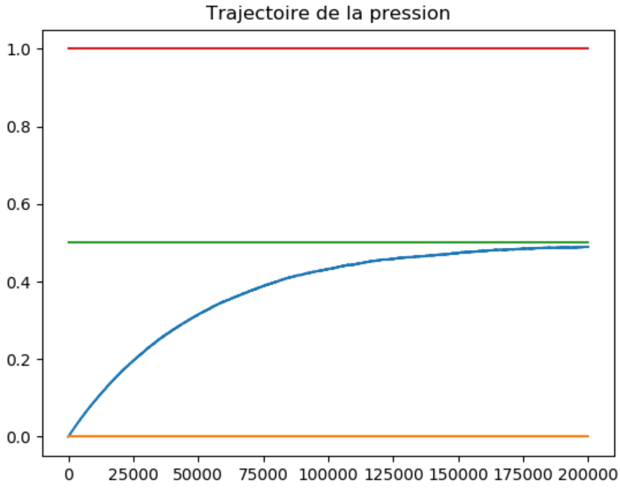
Urnes et particules

a particules de gaz dans deux chambres reliées par un petit trou



Question. Que se passe-t-il en temps long ?

Intuitivement...



Petit monde : 3 particules

- On note X le nombre de particules dans le compartiment gauche.
- Imaginons que les particules soient numérotées 1, 2 et 3.
- Le système peut être dans huit états :

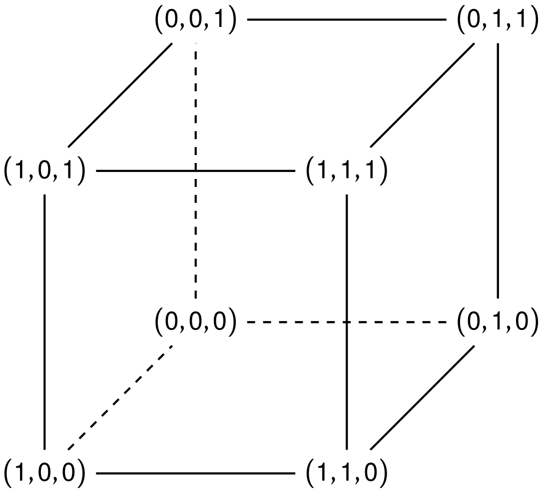
$$\underbrace{(0,0,0)}_{X=0} \quad \underbrace{(0,0,1) \quad (0,1,0) \quad (1,0,0)}_{X=1}$$

$$\underbrace{(0,1,1) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0)}_{X=2} \quad \underbrace{(1,1,1)}_{X=3}$$

selon les positions de chacune des trois particules.

Petit monde : 3 particules qui bougent !

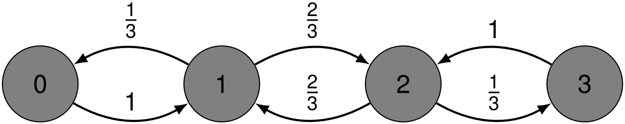
À chaque instant entier, une coordonnée est choisie au hasard et passe de 1 à 0 ou de 0 à 1.



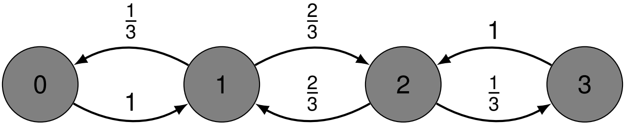
Modèle de la pression pour $a = 3$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre de boules dans le compartiment de gauche.

$$X_{n+1} = X_n + \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } \frac{3-X_n}{3}, \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{X_n}{3}. \end{cases}$$



Un peu de matrice



Quel rapport avec la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Et si on faisait deux pas ?

- Si $X_0 = i$, où est X_2 ?
- $X_0 = 0$: $0 \to 1 \to 0$ ou $0 \to 1 \to 2$
- $X_0 = 1$: $1 \to 0 \to 1$, $1 \to 2 \to 1$ ou $1 \to 2 \to 3$
- …

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 2/9 \\ 2/9 & 0 & 7/9 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Cas général : a particules

- Dynamique

$$X_{n+1} = X_n + \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } \frac{a-X_n}{a}, \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{X_n}{a}. \end{cases}$$

- Simulation de X_{n+1} connaissant X_n :

→ simuler une variable aléatoire uniforme U_{n+1} sur $\{1, 2, \ldots, a\}$
→ si $U_{n+1} \leq X_n$ alors $X_{n+1} = X_n - 1$ sinon $X_{n+1} = X_n + 1$.

Mesure stationnaire

- Mesure invariante : $\mu = \mathscr{B}(a, 1/2)$
- Si X_0 est de loi μ alors X_n aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = y) &= \mathbb{P}(X_0 = y-1, X_1 = y) + \mathbb{P}(X_0 = y+1, X_1 = y) \\
&= \mu(y-1)P(y-1,y) + \mu(y+1)P(y+1,y) \\
&= \left(\binom{a-1}{y-1} + \binom{a-1}{y}\right)\frac{1}{2^a} \\
&= \binom{a}{y}\frac{1}{2^a} = \mu(y).
\end{aligned}$$

Théorème

Proportion de temps passé en x converge vers $\mu(x)$

Et une excursion ?

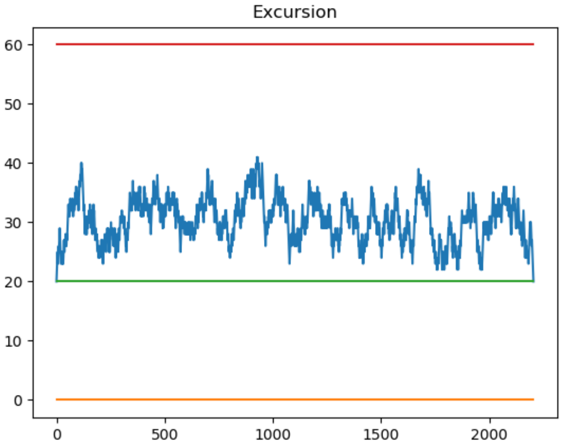


FIGURE – Excursion de la chaîne d'Ehrenfest pour $a = 60$ issue de $x_0 = 20$.

Un résultat important

Temps de retour en x :

$$T_x^+ = \inf\{n > 1 \ : \ X_n = x\}$$

Théorème

Pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x(T_x^+) = \frac{1}{\pi(x)} = \frac{2^a}{\binom{a}{x}}.$$

En particulier, si a est pair,

$$\mathbb{E}_0(T_0^+) = 2^a \quad et \quad \mathbb{E}_{a/2}\left(T_{a/2}^+\right) = \frac{2^a}{\binom{a}{a/2}} \underset{a\to\infty}{\sim} \sqrt{\pi a/2}.$$

Des idées de simulation avec $a = 3$ (pour commencer)

- Une trajectoire de longueur n
- Sur une traj. de longueur n, proportion de temps passé dans un état
- Une excursion issue de x fixé
- Longueur moyenne d'une excursion comparée à la mesure invariante
-

À vous de jouer

Récapitulatif des thèmes

- jeu des trois portes
- jeux de dés non transitifs
- loi géométrique, dé à 5 faces
- collectionneur de vignettes
- ruine du joueur
- battage de cartes
- urne d'Ehrenfest
- modèle de Wright-Fisher

Pour chaque groupe, petit programme de travail !

- expliciter le modèle
- réfléchir aux maths en jeu
- écrire des algorithmes associés
- les écrire en Python ou Scratch